TAMPEREEN YLIOPISTO

Pro gradu -tutkielma

Arttu Ojanperä

Metristyvät topologiset avaruudet

Informaatiotieteiden yksikkö

Matematiikka

Tammikuu 2016

Tampereen Yliopisto
Informaatiotieteiden yksikkö
OJANPERÄ, ARTTU: Metristyvät topologiset avaruudet
Pro gradu -tutkielma, 54 s.
Matematiikka
Tammikuu 2016

Tiivistelmä

Topologiassa joukon X metriikka d on kuvaus tulojoukosta $X \times X$ reaalilukujen joukolle, joka toteuttaa seuraavat ehdot kaikille pisteille $x, y, z \in X$:

1. $d(x, y) = d(y, x)$,
2. $d(x, y) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = y \quad$ ja
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Jokainen joukon X metriikka indusoi X:lle jonkin topologian. Topologinen avaruus X on metristyvä siinä tapauksessa, että on olemassa jokin metriikka joka indusoi sen topologian.

Topologiset avaruudet voidaan jakaa eri luokkiin niiden numeroituvuusominaisuuksien mukaan. Topologisella avaruudella voi olla esimerkiksi N_1-ominaisuus, jolloin jokaisella sen pisteellä on numeroituva ympäristökanta. N_2-avaruuksilla on numeroituva kanta. Jokainen N_2 avaruus on myös N_1.

Topologiset avaruudet voidaan jakaa luokkiin myös erotteluominaisuuksien perusteella. Erotteluaksioomilla määritellään mm. Hausdorffin avaruudet, säännölliset avaruudet ja normaalit avaruudet. Hausorffin avaruudessa jokainen erillinen pistepari voidaan erottaa erillisillä ympäristöillä. Säännöllisissä tämä ominaisuus laajennetaan koskemaan pisteen ja suljetun joukon pareja. Normaaleissa avaruuksissa jokaisella suljettujen joukkojen parilla on erilliset ympäristöt.

Voidaan todistaa, että jokainen säännöllinen topologinen avaruus, jolla on numeroituva kanta, on metristyvä. Tätä tulosta kutsutaan Urysohnin metristyslauseeksi. Se ei kuitenkaan tarjoa välttämätöntä ehtoa metristyvyydelle. Toisaalta voidaan osoittaa, että avaruus X on metristyvä jos ja vain jos se on

säännöllinen ja lisäksi sen kanta on numeroituva yhdiste lokaalisti äärellisistä joukoista, eli jokaisella X:n pisteellä on ympäristö, joka leikkaa vain äärellisen monta kannan joukkoa. Tämä tulos on nimeltään Nagatan–Smirnovin metristyslause.

Sisältö

Johdanto

Tässä tutkielmassa käsitellään metristyviä topologisia avaruuksia ja niihin liittyviä topologian perustuloksia. Metristyvä avaruus on erikoistapaus topologisesta avaruudesta. Tällaisella avaruudella on se ominaisuus, että sen topologia on mahdollista indusoida jollain metriikalla. Koska metriikkaa käyttämällä voidaan edelleen todistaa joitakin ominaisuuksia topologisesta avaruudesta helpommin kuin ilman metriikkaa, on hyödyllistä tietää onko käsiteltävä avaruus metristyvä vai ei. Niinpä on tarpeen löytää keinoja metristyvyyden selvittämiseksi.

Tutkielman luvussa 1 käydään kertauksenomaisesti läpi metriikan määritelmä sovelluksineen, sekä esitellään metrisen avaruuden ja metristyvän avaruuden määritelmät. Lisäksi todistetaan joitakin alustavia tuloksia.

Luvussa 2 esitellään melko perusteellisesti topologian numeroituvuus- ja erotteluaksioomat, sekä tarkastellaan esimerkkejä erilaisia numeroituvuus- ja erotteluominaisuuksia toteuttavista avaruuksista. Aksioomiin liittyen myös todistetaan joitakin tuloksia, joita hyödynnetään myöhemmin tutkielmassa.

Tuloavaruuden metristyvyyttä tutkitaan esimerkkien avulla luvussa 3. Tarkastelu rajoittuu joihinkin yksinkertaisimpiin tapauksiin.

Luvussa 4 esitetään riittävä ehto topologisen avaruuden metristyvyydelle. Tästä lauseesta käytetään nimeä *Urysohnin metristyslause*. Tämän todistuksessa käytetään apuna aikaisemmin samassa luvussa todistettua *Urysohnin lemmaa* ja *Urysohnin upotuslausetta*, jotka myös ovat aiheen kannalta merkittäviä tuloksia.

Tämän tutkielman keskeisin sisältö on luvussa 5 esitettävä niinsanottu *Nagatan–Smirnovin metristyslause*, joka on välttämätön ja riittävä ehto topologisen avaruuden metristyvyydelle. Luvussa myös käydään läpi joitain tarpeellisia määritelmiä ja apulauseita.

Tutkielman pääasiallisena lähteenä on käytetty J. Munkresin kirjaa *Topology*. Lukijan oletetaan hallitsevan hyvin matematiikan, erityisesti joukko-opin termit, merkintätavat ja tulokset, sekä topologian peruskäsitteet.

Luku 1

Metriset avaruudet ja metristyvät avaruudet

Aloitetaan käymällä kertauksenomaisesti läpi joitakin perusmääritelmiä liittyen metriikkoihin ja metrisiin avaruuksiin. Kahdessa ensimmäisessä kappaleessa esitetyt määritelmät oletetaan lukijalle ennestään tutuiksi, joten niiden käsittelemiseen ei käytetä merkittävästi aikaa.

Kappaleessa 1.3 esitellään metristyvyyden käsite, johon tämän tutkielman keskeinen sisältö liittyy, sekä todistetaan joitakin alustavia tuloksia liittyen metristyviin avaruuksiin.

Tässä luvussa on käytetty lähteenä D. Chatterjeen kirjaa *Topology, General & Algebraic* (sivut 33–41), ellei toisin ole mainittu.

1.1 Metriikat

Metristyvien avaruuksien tutkimiseksi on ensin selvitettävä metriikan käsite. Metriikat ovat sekä topologiassa että analyysissa käytettävä työkalu, jonka perimmäinen tarkoitus on kuvata pisteiden välisiä etäisyyksiä erilaisissa konstruktioissa. Aloitetaan määritelmällä.

Määritelmä 1.1.1. Olkoon X joukko ja olkoon $d : X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ kuvaus tulojoukosta $X \times X$ joukolle $\mathbb{R}_{\geq 0} = \{\, x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0 \,\}$. Kuvaus d on joukon X *metriikka*, mikäli seuraavat ehdot toteutuvat:

1) Kaikilla $x, y \in X$ pätee, että $d(x, y) = 0$, jos ja vain jos $x = y$.

2) Kaikilla $x, y \in X$ pätee, että $d(x,y) = d(y,x)$.

3) Kaikilla $x, y, z \in X$ pätee, että $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

Metriikaksi käy siis mikä tahansa kuvaus, joka toteuttaa nämä ehdot. Seuraavaksi tarkastellaan joitakin tapoja soveltaa annettuja metriikkoja.

Metriikat on määritelty siten, että minkä tahansa kahden pisteen välinen etäisyys on määritelty. Niinpä tästä voidaan edelleen johtaa määritelmä pisteen ja joukon väliselle etäisyydelle.

Määritelmä 1.1.2. Olkoon X joukko ja d sen metriikka. Olkoot $A \subseteq X$ ja $p \in X$. Pisteen p ja joukon A välinen etäisyys on

$$d(p, A) \quad = \quad \inf\{\, d(p,a) \mid a \in A \,\}.$$

Samalla tavalla voidaan tietenkin määritellä myös kahden joukon välinen etäisyys.

Määritelmä 1.1.3. Olkoon X joukko, d sen metriikka ja olkoon $A, B \subseteq X$. Joukkojen A ja B välinen etäisyys on

$$d(A, B) \quad = \quad \inf\{\, d(a,b) \mid a \in A,\, b \in B \,\}.$$

Määritelmä 1.1.4. Olkoon X joukko, d sen metriikka ja olkoon $A \subseteq X$. Joukon A *läpimitta* on

$$d(A) \quad = \quad \sup\{\, d(x,y) \mid x, y \in A \,\}.$$

Apulause 1.1.1. *Olkoon X joukko, d sen metriikka, $x, y \in X$ ja $A \subseteq X$. Tällöin pätee*

$$|d(x,A) - d(y,A)| \quad \leq \quad d(x,y).$$

Todistus (Vrt. [8, s. 23]). Kolmioepäyhtälön nojalla jokaiselle pisteelle $a \in A$ pätee:

$$d(x,a) \quad \leq \quad d(x,y) + d(y,a).$$

Pisteen ja joukon etäisyyden määritelmän perusteella tästä seuraa

$$\begin{aligned} d(x,A) \quad &\leq \quad d(x,y) + d(y,A) \\ d(x,A) - d(y,A) \quad &\leq \quad d(x,y). \end{aligned}$$

Toisaalta x:n ja y:n paikkoja epäyhtälössä voidaan vaihtaa, jolloin symmetrisyyden perusteella pätee:

$$d(y, A) - d(x, A) \quad \leq \quad d(x, y).$$

Väite seuraa suoraan näistä epäyhtälöistä. $\square$

Metrisien avaruuksien käsittelyssä usein tärkeää tietää, onko jokin joukko rajoitettu. Myös monet apulauseet hyödyntävät tätä ominaisuutta. Se määritellään seuraavalla tavalla.

Määritelmä 1.1.5. Olkoon X joukko, d sen metriikka ja olkoon $F \subseteq X$. Jos joukon F läpimitta $d(F)$ on äärellinen, niin sanotaan, että F on *rajoitettu.*

1.2 Metriset avaruudet

Seuraavaksi käytetään metriikan ominaisuuksia tietynlaisen topologian muotoiluun. Nämä niin sanotut metriset avaruudet ovat tärkeä erikoistapaus topologiassa.

Määritelmä 1.2.1. Olkooon X joukko ja olkoon d sen metriikka. Tällöin x-keskeinen, r-säteinen *avoin kuula* on joukko

$$B_d(x, r) \quad = \quad \{\, y \in X \mid d(y, x) < r \,\}.$$

Vastaavasti x-keskeinen, r-säteinen *suljettu kuula* on joukko

$$\overline{B_d}(x, r) \quad = \quad \{\, y \in X \mid d(y, x) \leq r \,\}.$$

Apulause 1.2.1. *Pisteen ja joukon välinen etäisyys on nolla jos ja vain jos ko. piste kuuluu ko. joukon sulkeumaan. Toisin sanoen, $d(x, A) = 0$ jos ja vain jos $x \in \overline{A}$.*

Todistus (Vrt. [3, s. 150]). Väittämä $d(x, A) = 0$ on määritelmän mukaisesti ekvivalentti sen kanssa, että $\inf\{\, d(x, y) \mid y \in A \,\} = 0$. Tämä tarkoittaa, että avoin kuula $B_d(x, r)$ leikkaa joukkoa A kaikilla $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, mikä taas on ekvivalenttia väitteen $x \in \overline{A}$ kanssa. $\square$

Ajatellaan nyt jollakin joukolla ja sen metriikalla määriteltyä kaikkien mahdollisten avoimien kuulien kokoelmaa. Koska tarkoituksena oli käyttää metriikkaa joukon topologian määrittämiseksi, on intuitiivista hakea topologiaa avoimien kuulien kokoelmasta. Tämä kokoelma ei vielä sinänsä käy topologiasta, mutta se määrittää kuitenkin topologian kannan, kuten seuraavaksi todistetaan. Näin päästään käsittelemään halutun kaltaisia avaruuksia.

Lause 1.2.1. *Olkoon X joukko ja olkoon d sen metriikka. Olkoon lisäksi $\mathcal{B}_d \subseteq \mathcal{P}(X)$ kokoelma X:n osajoukkoja, joka on määritelty seuraavasti:*

$$\mathcal{B}_d \quad = \quad \{\, B_d(x,r) \mid x \in X,\, r > 0 \,\}.$$

Tällöin $\mathcal{B}_d$ muodostaa X:n erään topologian kannan.

Todistus (Vrt. [5, s. 119]). Käytetään kantakriteeriä.

1) Jokaisella pisteellä $x \in X$ pätee $x \in B_d(x,r)$, aina kun $r > 0$. Niinpä jokaisella pisteellä $y \in X$ on olemassa sellainen $B_d(y,r) \in \mathcal{B}_d$, että pätee $y \in B_d(y,r)$. Näin ollen on selvää, että $\mathcal{B}_d$ on X:n peite.

2) Osoitetaan ensin, että jos $y \in B_d(x,r) \in \mathcal{B}_d$, niin silloin on olemassa sellainen $B_d(y,s) \in \mathcal{B}_d$, että $B_d(y,s) \subseteq B_d(x,r)$. Määritellään luku s seuraavasti: $s = r - d(x,y)$. Jos tällöin $z \in B_d(y,s)$, niin on oltava $d(y,z) < r - d(x,y)$, ja edelleen kolmioepäyhtälön nojalla

$$d(x,z) \quad \leq \quad d(x,y) + d(y,z) \quad < \quad r.$$

   Siis $B_d(y,s) \subseteq B_d(x,r)$.

   Olkoon nyt $B_1, B_2 \in \mathcal{B}_d$. Osoitetaan, että jokaiselle pisteelle $p \in B_1 \cap B_2$ on olemassa sellainen $B_3 \in \mathcal{B}_d$, että $p \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$. Kun $p \in B_1 \cap B_2$, niin edellä todetun nojalla voidaan valita sellaiset $r_1, r_2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, että pätee $B_d(p,r_1) \subseteq B_1$ ja $B_d(p,r_2) \subseteq B_2$. Kun valitaan $r = \min\{r_1, r_2\}$, niin tällöin $B_d(p,r) \subseteq B_1 \cap B_2$. Selvästi $B_d(p,r) \in \mathcal{B}_d$, joten $B_d(p,r)$ kelpaa tässä etsityksi joukoksi B_3.

Kantakriteerin nojalla $\mathcal{B}_d$ on siis joukon X erään topologian kanta. □

Määritelmä 1.2.2. Olkoon X joukko ja olkoon d sen metriikka. Sanotaan, että lauseessa 1.2.1 kuvatun kaltainen topologia on metriikan d *indusoima topologia* joukossa X, ja tätä topologiaa merkitään $\mathcal{T}_d$. Joukko X varustettuna topologialla $\mathcal{T}_d$ on *metrinen avaruus*.

Eri metriikat voivat indusoida samassa joukossa erilaiset topologiat, mutta on myös mahdollista, että eri metriikat indusoivat saman topologian. Seuraavasta apulauseesta on hyötyä, kun pyritään osoittamaan eri metriikoiden indusoimat topologiat samaksi.

Apulause 1.2.2. *Olkoot d_1 ja d_2 metriikkoja joukossa X ja olkoot $\mathcal{T}_{d_1}$ ja $\mathcal{T}_{d_2}$ niiden indusoimat topologiat. Tällöin $\mathcal{T}_{d_2}$ on hienompi kuin $\mathcal{T}_{d_1}$, jos ja vain jos jokaiselle $x \in X$ ja jokaiselle $\epsilon > 0$ on olemassa sellainen $\delta > 0$, että pätee*

$$B_{d_2}(x, \delta) \quad \subseteq \quad B_{d_1}(x, \epsilon).$$

Todistus (Vrt. [5, s. 122 – 123]). Todistetaan ensin, että jos $\mathcal{T}_{d_2}$ on hienompi kuin $\mathcal{T}_{d_1}$, niin apulauseessa esitetty epäyhtälö pätee. Oletetaan siis, että $\mathcal{T}_{d_2}$ on hienompi kuin $\mathcal{T}_{d_1}$. Valitaan mielivaltainen avoin kuula $B_{d_1}(x, \epsilon)$. Nyt on olemassa topologiassa $\mathcal{T}_{d_2}$ avoin joukko B, siten että $x \in B \subseteq B_d(x, \epsilon)$. Valitaan $\delta = d(x, X \setminus B)$. Selvästi tällöin pätee $x \in B_{d_2}(x, \delta) \subseteq B_{d_1}(x, \epsilon)$.

Osoitetaan sitten väitteen toinen suunta. Oletetaan, että apulauseessa esitetty epäyhtälö pätee. Valitaan mielivaltainen piste $x \in X$ ja topologian $\mathcal{T}_{d_1}$ kannan alkio B, jolle pätee $x \in B$. Nyt on olemassa avoin kuula $B_{d_1}(x, \epsilon) \subseteq B$. Oletuksen nojalla on nyt olemassa sellainen $\delta > 0$, että $B_{d_2}(x, \delta) \subseteq B_{d_1}(x, \epsilon)$. Koska $B_{d_1}(x, \epsilon)$ on topologian $\mathcal{T}_{d_1}$ kannan alkio, niin määritelmän mukaisesti $\mathcal{T}_{d_2}$ on hienompi kuin $\mathcal{T}_{d_1}$. $\square$

Seuraavassa esimerkissä todetaan, miten erilaiset topologiat voivat todellakin indusoida saman topologian.

Esimerkki 1.2.1. Olkoon $n \in \mathbb{N}$. Olkoon d_E avaruuden $\mathbb{R}^n$ normaali euklidinen metriikka, jossa

$$d_E(x, y) \quad = \quad \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2},$$

ja olkoon d_N avaruuden $\mathbb{R}^n$ neliömetriikka, jossa

$$d_N(x, y) \quad = \quad \max\{|x_1 - y_1|, \ldots, |x_n - y_n|\}.$$

Nyt d_E ja d_N indusoivat saman topologian $\mathbb{R}^n$:ssä.

Todistus (Vrt. [5, s. 123]). Olkoot $x = (x_1, \dots, x_n)$ ja $y = (y_1, \dots, n)$ avaruuden $\mathbb{R}^n$ pisteitä. Koska $x_i - y_i \geq 0$ kaikilla $i = 1, \dots, n$, niin on selvää, että

$$d_N(x, y) \quad \leq \quad d_E(x, y)$$

kaikilla $x, y \in \mathbb{R}^n$. Näin ollen kaikilla $x \in X$ ja kaikilla $\epsilon > 0$ pätee

$$B_{d_N}(x, \epsilon) \quad \subseteq \quad B_{d_E}(x, \epsilon).$$

Niinpä apulauseen 1.2.2 nojalla metriikan d_N indusoima topologia on hienompi kuin metriikan d_E indusoima topologia.

Toisaalta, koska

$$\sqrt{(x_i - y_i)^2} \quad \leq \quad \max\{|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|\}$$

kaikilla $i = 1, \dots, n$, niin selvästi

$$d_E(x, y) \quad \leq \quad \sqrt{n}\, d_N(x, y)$$

kaikilla $x, y \in \mathbb{R}^n$. Näin ollen kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$ ja kaikilla $\epsilon > 0$ pätee

$$B_{d_N}(x, \frac{\epsilon}{\sqrt{n}}) \quad \subseteq \quad B_{d_E}(x, \epsilon).$$

Niinpä apulauseen 1.2.2 nojalla metriikan d_N indusoima topologia on hienompi kuin metriikan d_E indusoima topologia.

Voidaan siis todeta, että metriikat d_N ja d_E indusoivat saman topologian $\mathbb{R}^n$:ssä. □

Koska metrisen avaruuden kanta koostuu avoimista kuulista, on selvää että metrisissä topologisissa avaruuksissa avoimien joukkojen pisteille on mahdollista löytää kyseiseen joukkoon sisältyvä avoin kuula.

Lause 1.2.2. *Olkoon $(M, \mathcal{T}_d)$ metrinen avaruus. Joukko $U \subseteq M$ on avoin jos ja vain jos jokaiselle pisteelle $u \in U$ on olemassa sellainen $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, että $B_d(u, r) \subseteq U$.*

Todistus (Vrt. [5, s. 120]). Olkoon jokaiselle pisteelle $u \in U$ olemassa sellainen $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, että $B_d(u,r) \subseteq U$. Selvästi $B_d(u,r) \in \mathcal{B}_d$ (missä $\mathcal{B}_d$ on topologian $\mathcal{T}_d$ kanta) kaikilla $u \in U$ ja kaikilla $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Merkitään näitä joukkoja seuraavasti: $B_d(u,r) = V_u$ kaikilla $u \in U$. Tällöin

$$U = \bigcup_{u \in U} V_u,$$

missä $V_u \in \mathcal{B}_d$ kaikilla $u \in U$. Siis kannan määritelmän perusteella U on avoin.

Jos taas $U \in M$ on avoin, niin jokainen piste $u \in U$ kuuluu johonkin kannan $\mathcal{B}_d$ joukkoon $B_d(p,r) \subseteq U$. Edelleen lauseen 1.2.1 todistuksen perusteella voidaan nyt jokaiselle pisteelle $u \in U$ valita joukko $B_d(u,s)$ siten, että $B_d(u,s) \subseteq B_d(p,r) \subseteq U$. □

1.3 Metristyvät avaruudet

Tähän mennessä ollaan nähty miten metriikkoja voidaan käyttää topologioiden muotoiluun. On myös mahdollista, että metriikkaa käyttämättä määritelty topologia on sellainen, että se voidaan konstruoida myös jonkin sopivan metriikan avulla. Tässä kappaleessa formalisoidaan metristyvien avaruuksien määritelmä tältä pohjalta.

Määritelmä 1.3.1. Olkoon $(X, \mathcal{T})$ topologinen avaruus. Sanotaan, että $(X, \mathcal{T})$ on *metristyvä*, jos on olemassa sellainen X:n metriikka d, että $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$, eli jos metriikan d indusoima topologia on sama kuin X:n tunnettu topologia.

Tuttuja metristyviä avaruuksia ovat esimerkiksi euklidiset avaruudet $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$), sekä esimerkiksi joukko $X \neq \emptyset$ varustettuna diskreetillä topologialla. Tämä voidaan todeta mm. osoittamalla, että normaali euklidinen etäisyys indusoi metriikkana tavanomaisen avointen välien topologian euklidisessa avaruudessa, ja vastaavasti diskreetti metriikka indusoi diskreetin topologian epätyhjässä joukossa.

Kaikki topologiset avaruudet eivät ole metristyviä. Tämän toteamiseen riittää seuraava yksinkertainen vastaesimerkki.

Esimerkki 1.3.1. Olkoon S joukko, jossa on useampi kuin yksi alkio. Tällöin S varustettuna triviaalilla topologialla $\mathcal{T} = \{\emptyset, S\}$ ei ole metristyvä.

Todistus. On selvää, että $(S, \mathcal{T})$ on topologinen avaruus. Tehdään vastaoletus, että $(S, \mathcal{T})$ on metristyvä. Nyt on siis olemassa sellainen metriikka d, että $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$. Koska S:ssä on useampi kuin yksi alkio, niin on olemassa pisteet $x, y \in S$, siten että $x \neq y$. Niinpä metriikan määritelmän nojalla on olemassa sellainen $\epsilon > 0$, että $d(x, y) = \epsilon$. Nyt avoin kuula $B(x, \frac{\epsilon}{2}) \in \mathcal{T}_d$. Edelleen voidaan todeta, että $x \in B(x, \frac{\epsilon}{2})$, joten $B(x, \frac{\epsilon}{2}) \neq \emptyset$, mutta toisaalta $y \notin B(x, \frac{\epsilon}{2})$, joten $B(x, \frac{\epsilon}{2}) \neq S$. Täytyy siis olla $\mathcal{T} \neq \mathcal{T}_d$, mikä on ristiriita. □

Metristyvät avaruudet ovat siis topologisten avaruuksien erikoistapaus. Metristyvät avaruudet ovat siinä mielessä mielenkiintoisia, että monesti metristyväksi tunnetusta avaruudesta voidaan todistaa tiettyjä asioita käyttämällä sen metriikkaa, vaikka ei edes tiedettäisi minkälainen kyseinen metriikka on (Kts. [5] s. 120). Kun nyt tunnetaan tarvittavat käsitteet, voidaan ruveta käsittelemään yleispäteviä ehtoja metristyvyydelle.

Todetaan kuitenkin vielä yksi tärkeä ominaisuus liittyen metristyviin avaruuksiin.

Apulause 1.3.1. *Olkoon X metristyvä topologinen avaruus. Tällöin sen osajoukko $A \subset X$ varustettuna aliavaruuden normaalilla topologialla on myös metristyvä.*

Todistus (Vrt. [4, s. 41]). Olkoon d metriikka, joka indusoi X:n topologian. Riittää todeta, että kun määritellään joukolle A metriikka d', jolle pätee

$$d'(x, y) \quad = \quad d(x, y)$$

aina kun $x, y \in A$, niin d' indusoi A:n topologian. Nimittäin, aina kun joukko $C \subseteq A$ on avoin, niin $C = U \cap A$ jollakin avoimella joukolla $U \subset X$. Tässä joukko $U = \bigcup_{j \in J} B_d(x_j, r_j)$ jollakin indeksijoukolla J. Niinpä pätee myös $C = \bigcup_{j \in J} B_{d'}(x_j, r_j)$. □

Luku 2

Topologian numeroituvuus- ja erotteluaksioomat

Jotta voitaisiin kehittää keino erottaa metristyvät avaruudet ei-metristyvistä, on tarpeen käydä läpi joitakin tapoja jakaa topologisia avaruuksia eri luokkiin. Tässä luvussa käsitellään topologisten avaruuksien luokittelua ensin numeroituvuuden ja sitten erottelukyvyn mukaan.

2.1 Numeroituvuusaksioomat

Käsitellään ensin lyhyesti kaksi tärkeintä topologian numeroituvuusaksioomaa. Numeroituvuusaksioomat jakavat topologisia avaruuksia luokkiin niille ominaisten numeroituvuusominaisuuksien mukaan.

2.1.1 Kertausta numeroituvuudesta

Tässä vaiheessa on syytä kerrata numeroituvuuden käsite, joka tietenkin on tärkeässä osassa topologian numeroituvuusaksioomissa.

Määritelmä 2.1.1. Joukko X on on *numeroituva*, mikäli X on äärellinen, tai on olemassa bijektiivinen kuvaus $f : X \to \mathbb{N}$. Muussa tapauksessa X on *ylinumeroituva*.

Kuten tiedetään, numeroituvia joukkoja ovat mm. $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ ja $\mathbb{Q}$, sekä niiden osajoukot. Tutuin ylinumeroituva joukko on $\mathbb{R}$.

2.1.2 Aksioomat

Topologian numeroituvuusaksioomista ensimmäinen käsittelee avaruuden yksittäisten pisteiden numeroituvaa ympäristöjen joukkoa, eli *ympäristökantaa*, ja toinen taas koko topologian kantaa.

Määritelmä 2.1.2. Olkoon X topologinen avaruus ja olkoon $x \in X$. Sanotaan, että avaruudella X on *numeroituva kanta pisteessä* x, jos on olemassa sellainen numeroituva joukko $\mathcal{B}$ x:n ympäristöjä, että jokaisella x:n ympäristöllä F pätee $B \subseteq F$ jollain $B \in \mathcal{B}$.

Määritelmä 2.1.3. Olkoon X topologinen avaruus. Jos X:llä on numeroituva kanta jokaisessa pisteessään $x \in X$, niin sanotaan, että X on N_1-*avaruus*.

Lause 2.1.1. *Jos X on metristyvä avaruus, niin X on N_1.*

Todistus (Vrt. [5, s. 130–131]). Olkoon d metriikka, joka indusoi X:n topologian. Valitaan mielivaltainen piste $x \in X$. Merkitään

$$\mathcal{B} \quad = \quad \{ B_d(x, \frac{1}{n}) \mid n \in \mathbb{Z}_+ \}.$$

On selvää, että tässä $\mathcal{B}$ on numeroituva. Nyt riittää siis osoittaa, että $\mathcal{B}$ on pisteen x kanta.

Koska metrisessä avaruudessa avoin kuula on avoin joukko, niin jokainen $B \in \mathcal{B}$ on x:n sisältävä avoin joukko. Täytyy vielä osoittaa, että jokaisella x:n ympäristöllä U on olemassa sellainen joukko $B_U \in \mathcal{B}$, että $B_U \subseteq U$.

Valitaan mielivaltainen x:n ympäristö U. Nyt on olemassa sellainen avoin joukko $V \in X$, että $x \in V \subseteq U$. Koska X on metrinen avaruus, niin on olemassa sellainen $\epsilon > 0$, että pätee $B_d(x, \epsilon) \subseteq V$. Edelleen on olemassa sellainen $k \in \mathbb{Z}_+$, että $k > \frac{1}{\epsilon}$. Niinpä $\frac{1}{k} < \epsilon$, joten

$$B_d(x, \frac{1}{k}) \quad \subseteq \quad B_d(x, \epsilon) \quad \subseteq \quad V \subseteq U.$$

□

Apulause 2.1.1. *Olkoon X topologinen avaruus ja A sen aliavaruus. Olkoon lisäksi J numeroituva indeksijoukko ja Y_j topologinen avaruus kaikilla $j \in J$. Tällöin pätee:*

1) Jos X on N_1, niin samoin on A.

2) Jos Y_j on N_1 jokaisella $j \in J$, niin tuloavaruus $\prod_{j \in J} Y_j$ on myös N_1.

Todistus (Vrt. [5, s. 191]). 1) Koska X on N_1, niin jokaisella pisteellä $x \in X$ on numeroituva ympäristökanta $\mathcal{B}_x$. Kun $a \in A$, niin joukko

$$\mathcal{B}(A)_a \quad = \quad \{\, B \cap A \mid B \in \mathcal{B}_a \,\}$$

on pisteen a numeroituva ympäristökanta aliavaruudessa A.

2) Olkoon $(y_j)_{j \in J}$ tuloavaruuden $\prod_{j \in J} Y_j$ piste. Koska jokainen avaruus Y_j on N_1, niin kaikilla pisteillä y_j on numeroituva ympäristökanta $\mathcal{B}_{y_j}$. Nyt joukko

$$\mathcal{B} \quad = \quad \{\, \prod_{j \in J} U_j \mid U_j \in \mathcal{B}_{y_j} \text{ kun } j \in I \text{ ja } U_j = X_j \text{ muulloin} \,\},$$

missä I on indeksijoukon J äärellinen osajoukko, on numeroituva ympäristökanta pisteelle $(y_j)_{j \in J}$.

$\square$

Seuraava aksiooma on vahvempi, mutta myös hieman selkeämpi ja helpommin ymmärrettävä. Tätä yksinkertaisempaa aksioomaa tullaan myöhemmin hyödyntämään eräissä tärkeissä lauseissa.

Määritelmä 2.1.4. Olkoon X topologinen avaruus ja olkoon $\mathcal{T}$ sen topologia. Jos on olemassa numeroituva kanta $\mathcal{B}$ topologialle $\mathcal{T}$, niin sanotaan että X on N_2-*avaruus.*

Esimerkki 2.1.1. Varustetaan reaalilukusuora $\mathbb{R}$ tavallisella avointen välien topologialla. Nyt $\mathbb{R}$ on N_2-avaruus.

Todistus (Vrt. [5, s. 191]). Määritellään kokoelma $\mathcal{C}$ $\mathbb{R}$:n osajoukkoja seuraavasti:

$$\mathcal{C} \quad = \quad \{\,]a, b[\mid a, b \in \mathbb{Q},\ a < b \,\}.$$

Koska rationaalilukujen joukko on numeroituva, niin samoin on joukko $\mathcal{C}$, sillä se on tulojoukon $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ indeksoima.

On myös helppoa nähdä, että $\mathcal{C}$ on $\mathbb{R}$:n tavanomaisen topologian kanta. Kun valitaan mikä tahansa avoin väli $]c,d[\subseteq \mathbb{R}$ ja piste x tältä väliltä, niin voidaan valita rationaaliluvut q ja r siten, että $c < q < x < r < d$, eli

$$x \quad \in \quad]q,r[\quad \subset \quad]c,d[.$$

□

Kuten N_1-avaruuksien tapauksessa, myös N_2-ominaisuus periytyy aliavaruuksille ja tuloavaruuksille. Tämän todistaminen on vielä helpompaa kuin edellisen aksiooman kohdalla.

Apulause 2.1.2. *Olkoon X topologinen avaruus ja A sen aliavaruus. Olkoon lisäksi J numeroituva indeksijoukko ja Y_j topologinen avaruus kaikilla $j \in J$. Tällöin pätee:*

1) Jos X on N_2, niin samoin on A.

2) Jos Y_j on N_2 jokaisella $j \in J$, niin tuloavaruus $\prod_{j \in J} Y_j$ on myös N_2.

Todistus (Vrt. [5, s. 191]). 1) Koska X on N_1, niin sillä on numeroituva kanta $\mathcal{B}_X$. Nyt joukko

$$\mathcal{B}_A \quad = \quad \{\, B \cap A \mid B \in \mathcal{B}_X \,\}$$

on aliavaruuden A numeroituva kanta.

2) Koska avaruus X_j on N_2 jokaisella $j \in J$, niin jokaisella X_i on olemassa numeroituva kanta $\mathcal{B}_i$. Nyt joukko

$$\mathcal{B} \quad = \quad \{\, \prod_{j \in J} U_j \mid U_j \in \mathcal{B}_j \text{ kun } j \in I \text{ ja } U_j = X_j \text{ muulloin } \,\},$$

missä I on indeksijoukon J äärellinen osajoukko, on tuloavaruuden $\prod_{j \in J} X_j$ numeroituva kanta.

□

2.2 Erotteluaksioomat

Tässä kappaleessa esitellään tärkeimmät erotteluaksioomat, joiden mukaan topologisia avaruuksia voidaan luokitella. Tässä yhteydessä keskitytään niinsanottuihin *Tihonovin aksioomiin* T_0–T_4. Aluksi käsitellään kertauksenomaisesti heikoimmat erotteluaksioomat aina Hausdorffin avaruuden määrittelevään aksioomaan T_2 asti. Pääpaino on kuitenkin vahvemmilla aksioomilla, eli tässä tapauksessa säännöllisyydellä ja normaalisuudella.

2.2.1 Heikot erotteluaksioomat

Seuraavaksi esiteltävät heikot erotteluaksioomat käsittelevät yksittäisten pisteiden erottamista avoimilla joukoilla. Myöhemmin olisi mahdollista muodostaa useimmista vahvemmista aksioomista kaksi eri versiota, joista toisessa vaaditaan toteutuvan ehto T_0 ja toisessa taas ehto T_1. Tässä tutkielmassa keskitytään kuitenkin aksioomien perinteisiin versioihin, jotka vaativat ehdon T_1 toteutumista.

Määritelmä 2.2.1. Olkoon X topologinen avaruus.

- Jos kaikille pisteille $x, y \in X$, $x \neq y$ pätee, että on olemassa avoin joukko $A \subset X$, siten että joko $x \in A$ ja $y \notin A$, tai $x \notin A$ ja $y \in A$, niin sanotaan, että avaruus X on T_0, tai *Kolmogorovin avaruus.*

- Jos kaikille pisteille $x, y \in X$, $x \neq y$ pätee, että on olemassa avoimet joukot $A, B \subset X$, siten että $x \in A$ ja $y \notin A$, sekä $x \notin B$ ja $y \in B$, niin sanotaan, että avaruus X on T_1, tai *Fréchet'n avaruus.*

On helppoa nähdä, että näistä aksiomaattisista määritelmistä toinen on ensimmäistä vahvempi. On siis triviaalia, että jokainen avaruus, joka on T_1, on myös T_0. Sen näyttämiseksi, että että tämä ei päde toiseen suuntaan, esitellään seuraavaksi eräs avaruus, joka on T_0 mutta ei T_1.

Esimerkki 2.2.1. Varustetaan puoliavoin väli $[0, 1[$ topologialla, jossa avoimia joukkoja ovat tyhjä joukko $\emptyset$, sekä kaikki puoliavoimet välit $[0, k[$, kun $0 < k \leq 1$. Tällöin väli $[0, 1[$ on T_0, mutta ei T_1.

Todistus (vrt. [6, s. 35]). Kun $x_1, x_2 \in [0,1[$, niin välille $[0, \max\{x_1, x_2\}[$ pätee, että ko. väli on avoin ja lisäksi se sisältää täsmälleen yhden luvuista x_1, x_2. Kuitenkin mille tahansa avoimelle joukolle A, joka sisältää suuremman luvuista x_1 ja x_2, pätee selvästi $x_1, x_2 \in A$. $\square$

Kuten aikaisemmin todettiin, tässä tutkielmassa tarkastellaan vahvempien erotteluaksioomien niitä versioita, jotka vaativat myös T_1-ominaisuuden toteutumista. Tämän helpottamiseksi todistetaan nyt eräs T_1-ominaisuuden kanssa ekvivalentti tulos.

Lause 2.2.1. *Topologinen avaruus X on T_1 jos ja vain jos yksiö $\{p\}$ on suljettu kaikilla $p \in X$.*

Todistus (vrt. [4, s. 73]). Osoitetaan ensin, että jos X on T_1, niin $\{p\}$ on suljettu kaikilla $p \in X$. Valitaan mielivaltainen $p \in X$, ja osoitetaan että $X \setminus \{p\}$ on avoin. Koska X on T_1, niin jokaisella pisteellä $x \in X \setminus \{p\}$ on olemassa pisteen x sisältävä avoin joukko U_x, siten että $p \notin U_x$. Olkoon

$$U \quad = \bigcup_{x \in X \setminus \{p\}} U_x.$$

Nyt U on avoimien joukkojen yhdisteenä avoin, ja toisaalta $U = X \setminus \{p\}$, joten $\{p\}$ on suljettu.

Osoitetaan sitten, että jos $\{p\}$ on suljettu jokaisella $p \in X$, niin X on T_1. Valitaan mielivaltaiset pisteet $x, y \in X$. Tällöin pätee

$$x \in X \setminus \{y\}, \quad y \notin X \setminus \{y\}$$

ja

$$y \in X \setminus \{x\}, \quad x \notin X \setminus \{x\}.$$

Oletus oli, että tässä avaruudessa yksiöt ovat suljettuja, ja siten niiden komplementit ovat avoimia. Näin ollen on löydetty pisteille x ja y sellaiset avoimet joukot, jotka toteuttavat T_1-avaruuden määritelmässä mainitun ehdon. $\square$

Koska suljettujen joukkojen äärelliset yhdisteet ovat suljettuja, voitaisiin yhtä hyvin sanoa, että topologinen avaruus on T_1, jos ja vain jos sen jokainen äärellinen osajoukko on suljettu (Kts. [4], s. 73). Jatkossa pitäydytään kuitenkin edellisen lauseen mukaisessa muodossa.

2.2.2 Hausdorffin avaruudet

Hausdorffin avaruudet määrittelevä aksiooma T_2 lienee lukijalle erotteluaksioomista tutuin. Koska Hausdorffin avaruudet kuuluvat topologian perusasioihin, ei niiden käsittelyyn käytetä liiaksi aikaa.

Määritelmä 2.2.2. Olkoon X topologinen avaruus. Jos tällöin kaikille pisteille $x, y \in X$ pätee, että on olemassa avoimet joukot $U, V \subset X$, siten että pätee $x \in U$ ja $y \in V$, ja lisäksi $U \cap V = \emptyset$ (eli x ja y sisältyvät erillisiin avoimiin joukkoihin), niin sanotaan, että avaruus X on T_2. Useinmiten tämän kaltaisia avaruuksia kutsutaan kuitenkin *Hausdorffin avaruuksiksi.*

Aivan yhtä intuitiivisesti kuin edellisten määritelmien tapauksessa, nähdään tässäkin heti, että jokainen Hausdorffin avaruus on myös tyyppiä T_1 (ja siten myös tyyppiä T_0). Näiden kolmen aksiooman määrittelemien topologisten avaruuksien luokat siis sisältyvät toisiinsa nousevassa numerojärjestyksessä.

Esimerkki 2.2.2. Metristyvä avaruus on aina T_2.

Todistus (vrt. [1, s. 173]). Olkoon X metristyvä topologinen avaruus ja olkoon d metriikka, joka indusoi sen topologian. Nyt kaikilla pisteillä $x, y \in X$ pätee:

$$x \neq y \quad \Rightarrow \quad d(x,y) \neq 0,$$

eli on olemassa $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ siten, että $d(x,y) = \epsilon$. Nyt avoimille kuulille $B_d(x, \frac{\epsilon}{2})$ ja $B_d(y, \frac{\epsilon}{2})$ pätee

$$B_d(x, \frac{\epsilon}{2}) \cap B_d(y, \frac{\epsilon}{2}) = \emptyset.$$

□

Lause 2.2.2. *Olkoon X Hausdorffin avaruus ja olkoon $x \in X$. Tällöin pisteen x sisältävien suljettujen joukkojen leikkaus sisältää ainoastaan pisteen x, eli*

$$\bigcap_{\substack{F \subseteq X, \\ F \text{ suljettu}, \\ x \in F}} F = \{x\}.$$

Todistus (vrt. [2, s. 75]). Olkoon $y \in X$ siten, että $y \neq x$. Tällöin on olemassa sellaiset avoimet joukot U ja V, että $x \in U$, $y \in V$ ja $U \cap V = \emptyset$. Ei siis voi olla $y \in \overline{U}$. Koska $\overline{U}$ on suljettu joukko, joka sisältää x:n, niin y ei tällöin kuulu x:n sisältävien suljettujen joukkojen leikkaukseen. □

Tämän lauseen suora seuraus on, että Hausdorffin avaruuksissa yksiöt ovat suljettuja. Tämä tosin on muutenkin jo selvää, sillä kuten aikaisemmin todettiin, T_2-avaruus on aina myös T_1, ja toisaalta T_1-avaruuksissa yksiöt ovat suljettuja.

Seuraavaa apulausetta käytetään joidenkin myöhempien lauseiden todistamisessa.

Lause 2.2.3. *Hausdorffin avaruuksien tuloavaruus on Hausdorffin avaruus.*

Todistus (vrt. [5, s. 197]). Olkoon J indeksijoukko ja olkoon X_j Hausdorffin avaruus jokaisella $j \in J$. Olkoot $x = (x_j)_{j \in J}$ ja $y = (y_j)_{j \in J}$ tuloavaruuden $X = \prod_{j \in J} X_j$ erillisiä pisteitä. Nyt on siis olemassa sellainen $i \in J$, että $x_i \neq y_i$. Koska X_i on Hausdorffin avaruus, niin tällöin on olemassa avoimet joukot $U_i, V_i \subseteq X_i$, siten että $x_i \in U_i$, $y_i \in V_i$ ja $U_i \cap V_i = \emptyset$. Nyt voidaan muodostaa avoimet joukot $U' = \prod_{j \in J} U'_j$ ja $V' = \prod_{j \in J} V'_j$ siten, että $U'_i = U_i$, $V'_i = V_i$, ja lisäksi $U'_j = X_j$ kun $j \neq i$ sekä $V'_j = X_j$ kun $j \neq i$. Nyt siis pätee $x \in U'$, $y \in V'$ ja $U' \cap V' = \emptyset$. □

2.2.3 Säännölliset avaruudet

Hausdorffin avaruuksien määritelmässä puhutaan ainoastaan erillisten pisteiden erottamisesta avoimilla joukoilla. Kun toinen piste vaihdetaan suljetuksi joukoksi, saadaan säännöllisen avaruuden määritelmä.

Määritelmä 2.2.3. Olkoon X topologinen avaruus, jossa joukko $\{a\}$ on suljettu aina kun $a \in X$. Jos jokaisella pisteellä $x \in X$ ja jokaisella suljetulla joukolla $F \subseteq X$, jolle pätee $x \notin F$, on olemassa avoimet joukot $U, V \subseteq X$ siten, että $x \in U$ ja $F \subset V$ ja lisäksi $U \cap V = \emptyset$ (eli piste x ja joukko F sisältyvät erillisiin avoimiin joukkoihin), niin sanotaan että avaruus X on T_3 tai *säännöllinen*.

Määritelmässä on mukana vaatimus yksiöiden suljettuudesta, koska tällä tavalla määritelmästä seuraa, että säännöllinen avaruus on aina myös Hausdorffin avaruus. Hyvänä vastaesimerkkinä tästä toimii kahden pisteen triviaali topologinen avaruus (jossa siis koko avaruus ja tyhjä joukko ovat ainoat avoimet joukot). Tämä avaruus toteuttaa muut säännöllisyyden ehdot, vaikka ei olekaan Hausdorffin avaruus (Kts. [5] s. 195).

Vaikka tämän määritelmän nojalla säännöllinen avaruus on aina myös Hausdorffin avaruus, niin Hausdorffin avaruus ei kuitenkaan aina ole säännöllinen, kuten seuraavasta esimerkistä nähdään.

Esimerkki 2.2.3. Määritellään joukko $K \subset \mathbb{R}$ seuraavasti:

$$K = \{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z}_+ \}.$$

Varustetaan nyt reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$ topologialla $\mathcal{T}$, jonka kannan $\mathcal{B}$ muodostavat avoimet välit $]a, b[$, missä $a, b \in \mathbb{R}$ ja $a < b$, sekä joukot jotka ovat muotoa $]a, b[\setminus K$. Tällä topologialla varustettuna reaalilukujen joukko on Hausdorffin avaruus, sillä kaksi erillistä reaalilukua kuuluvat aina joihinkin kahteen erilliseen avoimeen väliin. Tämä avaruus ei kuitenkaan ole säännöllinen.

Todistus (vrt. [5, s. 197]). Osoitetaan ensin, että avaruudessa $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ joukko K on suljettu. Tarkastellaan mielivaltaista pistettä $p \in K$. Jos $p = 1$, niin silloin väli $]\frac{3}{4}, \frac{5}{4}[$ on sellainen p:n ympäristö, joka leikkaa K:n pisteistä ainoastaan p:n kanssa. Tarkastellaan sitten tapausta $p \neq 1$. Nyt $p = \frac{1}{n}$ jollakin $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$. Edelleen on olemassa sellaiset reaaliluvut $c, d \in \mathbb{R}$, että pätee

$$\frac{1}{n+1} < c < \frac{1}{n} < d < \frac{1}{n-1}.$$

Nyt siis avoin väli $]c, d[$ on pisteen p sellainen ympäristö, joka leikkaa K:n pisteistä ainoastaan p:n kanssa. Eli määritelmän mukaisesti p on K:n erakkopiste. Koska p oli mielivaltainen, voidaan todeta, että jokainen K:n piste on erakkopiste, ja niinpä K on varmasti suljettu.

Nyt on tärkeää huomata, että $0 \notin K$. Osoitetaan, että ei ole olemassa sellaisia erillisiä avoimia joukkoja $U, V \subseteq X$, siten että $0 \in U$ ja $K \subset V$.

Tehdään vastaoletus, että voidaan valita avoimet joukot U ja V siten, että $0 \in U$ ja $K \subset V$ ja lisäksi $U \cap V = \emptyset$. Valitaan sitten jokin topologian kannan alkio W, jolle pätee $0 \in W$ ja $W \subset U$. Joukon W on oltava muotoa $]a, b[\,\setminus K$, sillä jokainen nollan sisältävä avoin väli $]a, b[$ sisältää myös jonkun joukon K alkion. Nyt voidaan valita $n \in \mathbb{Z}_+$ siten, että $\frac{1}{n} \in]a, b[$. Edelleen voidaan valita kannan $\mathcal{B}$ alkio I siten, että $\frac{1}{n} \in I$. Joukon I on oltava jokin avoin väli $]c, d[$, koska $\frac{1}{n} \in K$. Lopuksi valitaan $z \in \mathbb{R}$ siten, että $z < \frac{1}{n}$ ja $z > \max\{c, \frac{1}{n+1}\}$. Huomataan, että $z \in U \cap V$, joten U ja V eivät ole erillisiä. $\square$

Kuten tiedetään, on Hausdorffin avaruuden aliavaruus aina myös Hausdorffin avaruus, ja samoin Hausdorffin avaruuksien tuloavaruus on Hausdorffin avaruus (Lause 2.2.3). Myöhemmin todistetaan, että vastaavat ominaisuudet pätevät myös säännöllisille avaruuksille. Tämän todistamiseen tarvitaan seuraavaa hyödyllistä apulausetta.

Apulause 2.2.1. *Topologinen avaruus X on säännöllinen jos ja vain jos jokaisella pisteellä $x \in X$ ja jokaisella x:n ympäristöllä $U \subseteq X$ on olemassa sellainen x:n ympäristö $V \subseteq X$, että $\overline{V} \subseteq U$.*

Todistus (kts. [5, s. 196]). Todistetaan ensin, että säännöllisille avaruuksille pätee lauseen toinen ehto.

Olkoon X säännöllinen topologinen avaruus. Valitaan mielivaltainen piste $x \in X$ ja sen ympäristö $U \subseteq X$. Nyt on olemassa avoin joukko $U' \subseteq X$, siten että $x \in U' \subseteq U$. Olkoon $F = X \setminus U'$. Koska U' on avoin, niin F on suljettu. Nyt siis säännöllisyyden nojalla on olemassa sellaiset avoimet joukot $V, W \subseteq X$, että pätee $x \in V$ ja $F \subset W$, ja lisäksi $V \cap W = \emptyset$. Koska jokaisella pisteellä $y \in F$ on olemassa V:stä erillinen ympäristö (eli W), niin pätee $\overline{V} \cap F = \emptyset$. Täten $\overline{V} \subseteq U' \subseteq U$.

Todistetaan sitten, että jos lauseen toinen ehto pätee avaruudelle X, niin X on säännöllinen.

Olkoon X topologinen avaruus, jolle pätee, että jokaisen pisteen jokainen ympäristö sisältää ko. pisteen jonkin ympäristön sulkeuman. Valitaan mielivaltainen piste $x \in X$ sekä suljettu joukko $F \subset X$ siten, että $x \notin F$. Olkoon $U = X \setminus F$. Nyt U on avoin joukko, joten oletuksen nojalla on olemassa sellainen x:n ympäristö V, että $\overline{V} \subset U$. Nyt on siis olemassa avoin joukko W siten, että $x \in W \subset \overline{V} \subset U$. Eli $x \in W$, $F \subset U$ ja $W \cap U = \emptyset$. $\square$

Nyt voidaan siis todistaa, että säännöllisyys periytyy aliavaruuksille ja säilyy tuloavaruuksissa. Myöhemmin tullaan itse asiassa havaitsemaan, että säännöllisyys on tässä tutkielmassa käsiteltävistä erotteluominaisuuksista vahvin, jolle molemmat näistä säännöistä pätevät.

Lause 2.2.4. *Olkoon X säännöllinen avaruus ja olkoon $\emptyset \neq Y \subset X$ sen aliavaruus. Tällöin Y on säännöllinen avaruus.*

Todistus (kts. [5, s. 196–197]). Koska Y on X:n aliavaruus, ja X on säännöllinen, niin yksiöt ovat suljettuja Y:ssä. Olkoon $p \in Y$ ja olkoon $F \subset Y$ suljettu joukko, jolle pätee $p \notin F$. Nyt siis $\overline{F} \cap Y = F$, kun $\overline{F}$ tarkoittaa F:n sulkeumaa X:ssä. Näin ollen $x \notin \overline{F}$, joten X: säännöllisyyden perusteella on olemassa erilliset avoimet joukot $U, V \subseteq X$, siten että $p \in U$ ja $\overline{F} \subset V$. Näin ollen $U \cap Y$ ja $V \cap Y$ ovat erilliset, Y:ssä avoimet joukot, joille pätee $p \in U \cap Y$ ja $F \subset V \cap Y$. □

Lause 2.2.5. *Säännöllisten avaruuksien tuloavaruus on säännöllinen.*

Todistus (kts. [5, s. 197]). Olkoon J indeksijoukko ja olkoon X_j säännöllinen avaruus jokaisella $j \in J$. Lauseen 2.2.3 nojalla tuloavaruus $X = \prod_{j \in J} X_j$ on Hausdorffin avaruus, joten edelleen lauseen 2.2.1 nojalla yksiöt ovat suljettuja tuloavaruudessa X.

Todistetaan X:n säännöllisyyden toinen ehto apulauseen 2.2.1 avulla. Olkoon $x = (x_j)_{j \in J} \in X$ ja olkoon $U \subseteq X$ pisteen x ympäristö. Nyt voidaan valita x:n sisältävä X:n kannan alkio $\prod_{j \in J} V_j$, siten että $\prod_{j \in J} V_j \subseteq U$. Edelleen avaruuksien X_j säännöllisyyden nojalla voidaan valita jokaiselle $j \in J$ sellainen pisteen x_j ympäristö $W_j \in X_j$, että $\overline{W_j} \subset V_j$. Jos jollain indeksillä $i \in J$ pätee $V_i = X_i$, niin määritellään että $W_i = X_i$. Nyt $W = \prod_{j \in J} W_j$ on pisteen x ympäristö avaruudessa X. Koska $\overline{W} = \prod_{J \in J} \overline{W_j}$, niin nyt pätee $\overline{W} \subset \prod_{j \in J} V_j \subset U$. Näin ollen tuloavaruus X on säännöllinen. □

Seuraavassa esimerkissä esitellään eräs mielenkiintoinen topologinen avaruus, jota tullaan käyttämään esimerkkinä tässä luvussa myöheminkin.

Esimerkki 2.2.4. Tarkastellaan *Sorgenfreyn suoraa* $\mathbb{R}_l$. Tässä $\mathbb{R}_l$ on reaalilukujen joukko varustettuna topologialla, jonka kannan muodostavat puoliavoimet välit $[a, b[$, $a < b$. Tämä avaruus on T_3.

Todistus. Koska topologisten avaruuksien määritelmä ja peruskäsitteet oletetaan tässä tutkielmassa tunnetuiksi, ei tässä yhteydessä todisteta, että Sorgenfreyn suora itse asiassa on topologinen avaruus. Siirrytään sen sijaan suoraan säännöllisyyden todistamiseen.

Olkoot $p, q \in \mathbb{R}_l$, siten että $p \neq q$. Nyt kun $\delta = |p - q|$, niin voidaan valita seuraavat avoimet joukot: $U = [p, p + \delta[$ ja $V = [q, q + \delta[$. Nyt selvästi $p \in U$, $q \in V$ ja $U \cap V = \emptyset$. Niinpä $\mathbb{R}_l$ on T_2, joten se on myös T_1. Niinpä lauseen 2.2.1 nojalla yksiöt ovat suljettuja $\mathbb{R}_l$:ssä.

Olkoon $x \in \mathbb{R}_l$ ja olkoon $U \subseteq \mathbb{R}_l$ pisteen x ympäristö. Nyt voidaan valita avaruuden $\mathbb{R}_l$ kannan alkio $[a, b[$, siten että $x \in [a, b[$. Olkoon $\epsilon = |x - b|$. Nyt kun $V = [x, x + \frac{\epsilon}{2}[$, niin selvästi V on x:n ympäristö ja toisaalta taas $\overline{V} \subset [a, b[\subseteq U$. Näin ollen $\mathbb{R}_l$ on säännöllinen apulauseen 2.2.1 perusteella. □

Esimerkki 2.2.5. Olkoon $\mathbb{R}_l$ esimerkissä 2.2.4 esitelty Sorgenfreyn suora. Nyt myös *Sorgenfreyn taso* $\mathbb{R}_l^2$ on säännöllinen.

Todistus. Tämä on suoraa seurausta esimerkin 2.2.4 todistuksesta sekä lauseesta 2.2.5. □

2.2.4 Normaalit avaruudet

Tässä vaiheessa voidaan jo päätellä, miten seuraava vahvempi erotteluaksiooma määritellään. Koska Hausdorffin avaruuksissa erilliset pisteet sisältyvät erillisiin avoimiin joukkoihin ja säännöllisissä avaruuksissa sama pätee erilliseen pisteeseen ja suljettuun joukkoon, on seuraava looginen askel tietenkin ulottaa tämä erottelu koskemaan mitä tahansa kahta erillistä suljettua joukkoa.

Määritelmä 2.2.4. Olkoon X topologinen avaruus, jossa joukko $\{a\}$ on suljettu aina kun $a \in X$. Jos kaikilla suljetuilla joukoilla $A, B \subseteq X$ on olemassa avoimet joukot $U, V \subseteq X$ siten että $A \subseteq U$ ja $B \subseteq V$ ja lisäksi $U \cap V = \emptyset$ (eli joukot A ja B sisältyvät erillisiin avoimiin joukkoihin), niin sanotaan, että avaruus X on T_4 tai *normaali*.

Voidaan todeta, hieman soveltaen aikaisempaa sääntöä, että selvästi T_4-avaruus on myös muotoa T_3, koska yksiöt ovat suljettuja joukkoja T_1-avaruuksissa.

T_3-avaruus ei kuitenkaan aina ole T_4, mikä on myöskin mahdollista todeta vastaesimerkillä.

Esimerkki 2.2.6. Tarkastellaan jälleen esimerkissä 2.2.5 säännölliseksi todettua *Sorgenfreyn tasoa* $\mathbb{R}_l^2$. Vaikka $\mathbb{R}_l^2$ onkin säännöllinen avaruus, niin se ei ole normaali.

Todistus tälle on varsin mutkikas, joten emme tässä esittele sitä kuin pääpirteissään. Ideana on valita seuraavanlaiset joukot:

$$\begin{aligned} F &= \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y=1 \text{ ja } \sqrt{(x-1)^2+y^2} \in \mathbb{Q} \,\}, \\ G &= \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y=1 \text{ ja } \sqrt{(x-1)^2+y^2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \,\}. \end{aligned}$$

Nyt G ja H ovat erillisiä joukkoja. Ne ovat myös suljettuja, sillä kumpikin niistä voidaan esittää puoliavoimien "laatikoiden" $[a,b[\times[c,d[$ yhdisteen komplementtina.

Joukot F ja G ovat kuitenkin niin lähellä toisiaan, että mikä tahansa G:n sisältävä avoin joukko leikka jotain F:n sisältävää avointa joukkoa.

Tarkemmin tämä todistus on esitetty R. H. Sorgenfreyn paperissa *On the topological product of paracompact spaces* (Kts. [7]).

Tämän lisäksi Sorgenfreyn tasoa voisi käyttää vastaesimerkkinä sen todistamisessa, että normaalien avaruuksien tulo ei välttämättä ole normaali. On nimittäin mahdollista (joskin tämän tutkielman rajoituksia ajatellen liian hankalaa) todistaa, että Sorgenfreyn suora on normaali. Sivuutetaan kuitenkin nämä todistukset.

Seuraavaksi tarkastellaan riittävää ehtoa normaalisuudelle. Tarkoituksena on todistaa, että jokainen säännöllinen avaruus, jolla on numeroituva kanta, on normaali. Tämän todistamissa käytetään apulausetta 2.2.1.

Lause 2.2.6. *Jos X on säännöllinen topologinen avaruus, jolla on numeroituva kanta, niin X on normaali.*

Todistus (kts. [5, s. 200–201]). Olkoon X säännöllinen topologinen avaruus ja olkoon $\mathcal{B}$ sen numeroituva kanta. Olkoot A ja B suljettuja joukkoja X:ssä siten, että $A \cap B = \emptyset$. Nyt on siis osoitettava, että A ja B ovat erillisten avoimien joukkojen osajoukkoja.

Koska X on säännöllinen, niin jokaisella pisteellä $a \in A$ on olemassa B:stä erillinen avoin joukko K, siten että $a \in K$. Edelleen apulauseen 2.2.1 perusteella voidaan valita pisteen a ympäristö L siten, että $\overline{L} \subset K$. Täten voidaan valita kannan $\mathcal{B}$ joukko M siten, että $a \in M$ ja $M \subseteq L$. Tällä tavalla voidaan valita jokaiselle pisteelle $a \in A$ sellainen kannan $\mathcal{B}$ joukko, jonka sulkeuma ei leikkaa joukkoa B. Koska kanta $\mathcal{B}$ on numeroituva, niin näitä joukkoja on myös numeroituva määrä. Olkoon näiden joukkojen kokoelma $\{ U_n \mid n \in N \}$, missä N on jokin numeroituva indeksijoukko.

Samalla tavalla voidaan valita numeroituva kokoelma $\{ V_n \mid n \in N \}$ kannan $\mathcal{B}$ joukkoja siten, että V_k ei leikkaa joukkoa A millään $k \in N$ ja edelleen jokaiselle pisteelle $b \in B$ pätee $b \in V_k$ jollakin $k \in N$.

Olkoot

$$U = \bigcup_{n \in N} U_n \quad \text{ja} \quad V = \bigcup_{n \in N} V_n.$$

Nyt joukot U ja V ovat avoimia ja lisäksi $A \subset U$ sekä $B \subset V$. Näitä joukkoja on kuitenkin vielä edelleen muokattava, jotta saataisiin varmasti aikaan erilliset avoimet joukot. Olkoot jokaiselle indeksille $k \in N$

$$U'_k = U_k \setminus \bigcup_{i=1}^{k} \overline{V_i} \quad \text{ja} \quad V'_k = V_k \setminus \bigcup_{i=1}^{k} \overline{U_i}.$$

Tässä U'_k ja V'_k ovat avoimen joukon sekä suljettujen joukkojen yhdisteen erotuksia, joten U'_k ja V'_k ovat avoimia kaikilla $k \in N$. Nyt huomataan, että kokoelma $\{ U'_n \mid n \in N \}$ on A:n peite, sillä jokainen piste $a \in A$ kuuluu johonkin joukkoon U_k. Toisaalta yksikään piste $a \in A$ ei kuulu mihinkään joukoista $\overline{V_k}$. Samalla tavalla joukkojen V'_k kokoelma muodostaa joukon B peitteen.

Lopuksi voidaan todeta, että avoimet joukot

$$U' = \bigcup_{n \in N} U'_n \quad \text{ja} \quad V' = \bigcup_{n \in N} V'_n$$

ovat erillisiä. Olkoon $x \in U' \cap V'$. Tällöin pätee $x \in U'_i \cap V'_j$ joillekin $i, j \in N$. Oletetaan, että $i \leq j$. Nyt ko. joukkojen määritelmien mukaisesti seuraa, että $x \in U_i$ ja toisaalta koska $i \leq j$, niin $x \in \overline{U_i}$. Samanlaiseen tilanteeseen päädytään, jos oletetaan, että $i \geq j$. Tämä on ristiriitaista, joten on todettava, että $U' \cap V' = \emptyset$. $\square$

Nyt ollaan käyty läpi tarvittavat määritelmät ensimmäisen metristyvyyden riittävän ehdon tarkasteluun. Tähän siirrytään luvussa 4.

Luku 3

Tuloavaruuden metristyvyys

Aikaisemmissa luvuissa on löydetty eräitä välttämättömiä ehtoja annetun avaruuden metristyvyydelle. Seuraavaksi pohditaan hieman metristyvyyden seurauksia, tarkemmin sanottuna sitä, milloin metristyvien avaruuksien tuloavaruus on metristyvä. Kuten aikaisempien tuloksien perusteella voidaan jo aavistaa, tämän kysymyksen ratkaiseminen ei ole yksinkertaista. Niinpä tyydymme tässä luvussa käsittelemään asiaa lähinnä joidenkin esimerkkien kautta.

3.1 Äärelliset tuloavaruudet

Palautetaan mieleen ensin esimerkissä 1.2.1 esitellyt euklidinen metriikka ja neliömetriikka. Seuraavaksi todistetaan, että näiden metriikoiden indusoima topologia $\mathbb{R}^n$:ssä on itse asiassa $\mathbb{R}^n$:n normaali tulotopologia.

Esimerkki 3.1.1. Koska esimerkissä 1.2.1 osoitettiin, että euklidinen metriikka ja neliömetriikka indusoivat saman topologian, niin tässä riittää osoittaa, että neliömetriikan indusoima topologia on sama kuin tulotopologia.

Valitaan mielivaltainen tulotopologian kannan alkio

$$B = \;]a_1, b_1[\; \times \ldots \times \;]a_n, b_n[$$

ja piste $x = (x_1, \ldots, x_n) \in B$. Nyt jokaiselle indeksille $i = 1, \ldots, n$ on olemassa sellainen $\epsilon_i > 0$, että pätee

$$]x_i - \epsilon_i, x_i + \epsilon_i[\quad \subseteq \quad]a_i, b_i[.$$

Kun valitaan $\epsilon = \min\{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n\}$, niin selvästi pätee $B_{d_N}(x, \epsilon) \subseteq B$. Näin ollen neliömetriikan indusoima topologia on hienompi kuin tulotopologia.

Valitaan nyt neliömetriikan indusoiman topologian kannan mielivaltainen alkio $B_{d_N}(x, \epsilon)$ ja sen mielivaltainen piste y. On helppoa todeta, että tulojoukko

$$]x_1 - \epsilon, x_1 + \epsilon[\ \times \ldots \times\ ]x_n - \epsilon, x_n + \epsilon[\quad = \quad B_{d_N}(x, \epsilon)$$

on sellainen tulotopologian kannan elementti B, jolle pätee $y \in B \subseteq B_{d_N}(x, \epsilon)$. Niinpä tulotopologia on neliötopologiaa hienompi.

Nyt voidaan siis todeta, että neliömetriikka (ja samalla siis euklidinen metriikka) indusoi normaalin tulotopologian joukossa $\mathbb{R}^n$.

Edellinen esimerkki voidaan yleistää koskemaan kaikkia metristyvien avaruuksien äärellisiä tuloavaruuksia. Toisin sanoen, metristyvien avaruuksien äärellinen tulo on aina metristyvä. Todistus on muodoltaan samanlainen kuin edellisen esimerkin todistus, sillä metristyvien avaruuksien äärelliselle tuloavaruudelle on aina mahdollista muodostaa neliötopologia.

3.2 Äärettömät tuloavaruudet

Kun siirrytään tarkastelemaan äärettömiä $\mathbb{R}$:n tuloavaruuksia, päädytään edellisessä kappaleessa esitettyjä neliötopologiaa ja euklidista topologiaa käyttäen ongelmiin. Jos esimerkiksi yritetään määritellä euklidinen metriikka avaruudelle $\mathbb{R}^I$, missä I on ääretön, niin huomataan, että kaavassa

$$d_E(x, y) \quad = \quad \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(x_i - y_i)^2},$$

neliöjuuren alle jäävä sarja voi olla hajaantuva. Tällöin haluttu etäisyys ei ole määritelty.

Myöskään intuitiivisesti oikealta tuntuva neliömetriikan laajennus äärettömille indeksijoukoille

$$d_N(x, y) \quad = \quad \sup\{\, |x_i - y_i| \mid i \in I \,\}$$

ei välttämättä ole järkevä. On siis kehitettävä sellainen metriikka, joka toimii myös äärettömillä indeksijoukoilla.

Määritelmä 3.2.1. Olkoon joukossa $\mathbb{R}$ määritelty seuraavanlainen metriikka:

$$d_R(x, y) \quad = \quad \min\{|x-y|, 1\}.$$

Tätä metriikkaa sanotaan joukon $\mathbb{R}$ tavalliseksi *rajoitetuksi metriikaksi.*

On helppoa osoittaa, että d_R on todella metriikka. Edelleen on triviaalia, että d_R indusoi saman topologian kuin d_N (eli myös saman kuin d_E).

Nyt voidaan käyttää reaalilukusuoran tavallista rajoitettua metriikkaa halutun metriikan määrittelemiseksi äärettömille indeksijoukoille.

Määritelmä 3.2.2. Olkoon I (mahdollisesti ääretön) indeksijoukko ja olkoot $x = (x_i)_{i \in I}$ sekä $y = (y_i)_{i \in I}$ avaruuden $\mathbb{R}^I$ pisteitä. Nyt joukolle $\mathbb{R}^I$ voidaan määritellä metriikka d_T seuraavasti:

$$d_T(x, y) \quad = \quad \sup\{\, d_R(x_i, y_i) \mid i \in I \,\}.$$

Sanotaan, että tämä metriikka on joukon $\mathbb{R}^I$ *tasainen metriikka*, ja sen indusoima topologia on $\mathbb{R}^I$:n *tasainen topologia.*

On helppoa nähdä, että tasainen topologia on sama kuin neliötopologia (ja siten sama kuin tulotopologia), silloin kun indeksijoukko I on äärellinen. Äärettömien indeksijoukkojen tapauksessa näin ei kuitenkaan ole. Kuten äärellisenkin tuloavaruuden tapauksessa, voidaan samaa kaavaa noudattaen todistaa, että tasainen topologia on hienompi kuin tulotopologia. Jos kuitenkin valitaan tasaisen topologian kannan alkio $U = (U_i)_{i \in I}$, jossa $U_i = B_{d_T}(x_i, \epsilon_i)$, ja $\epsilon_i < 1$ kaikilla indekseillä i, niin millekään U:n pisteelle x ei voida löytää sellaista tulotopologian kannan alkiota $V = (V_i)_{i \in I}$, että pätisi $x \in V \subseteq U$. Tässä nimittäin $V_i \neq \mathbb{R}$ vain äärellisellä joukolla indeksejä.

Ei siis vielä ole löydetty sellaista metriikkaa, jonka avulla voitaisiin todistaa avaruuden $\mathbb{R}^I$ olevan metristyvä siinä tapauksessa, että indeksijoukko I on ääretön. Tällaisen metriikan löytäminen onkin melko haastavaa. Tässä yhteydessä tyydymme määrittelemään avaruuden $\mathbb{R}^I$ tulotopologian indusoivan metriikan siinä tapauksessa, että I on numeroituvasti ääretön.

Lause 3.2.1. *Olkoon d_R joukon $\mathbb{R}$ tavallinen rajoitettu metriikka. Määritellään nyt joukolle $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ metriikka D seuraavasti:*

$$D(x, y) \quad = \quad \sup\left\{\frac{d_R(x_i, y_i)}{i} \mid i \in \mathbb{N}\right\}$$

kaikilla $x, y \in \mathbb{N}$. Tämä metriikka indusoi normaalin tulotopologian joukolle $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Todistus (kts. [5, s. 125–126]). Ensimmäiseksi täytyy todeta, että D on todella metriikka. Ainoastaan kolmioepäyhtälön toteutuminen ei ole triviaalia. Todetaan siis, että jokaiselle indeksille i pätee

$$\frac{d_R(x_i, z_i)}{i} \quad \leq \quad \frac{d_R(x_i, y_i)}{i} + \frac{d_R(y_i, z_i)}{i} \quad \leq \quad D(x, y) + D(y, z),$$

joten myös

$$D(x, z) \quad = \quad \sup\left\{\frac{d_R(x_i, z_i)}{i} \mid i \in \mathbb{N}\right\} \quad \leq \quad D(x, y) + D(y, z).$$

Kolmioepäyhtälö siis pätee, joten D on metriikka.

Jäljelle jää sen todistaminen, että metriikka D indusoi $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$:n tulotopologian. Tämä tehdään osoittamalla osajoukkous molempiin suuntiin.

Olkoon U avoin joukko metriikan D indusoimassa topologiassa ja olkoon $x \in U$. Nyt on siis löydettävä sellainen tulotopologiassa avoin joukko V, että pätee $x \in V \subseteq U$. Valitaan ensin sellainen avoin kuula $B_D(x, \epsilon)$, jolle pätee $B_D(x, \epsilon) \subseteq U$. Nyt voidaan valita luonnollinen luku N siten, että $\frac{1}{N} < \epsilon$. Olkoon nyt V tulotopologian kannan alkio, joka on määritelty seuraavasti:

$$V \quad = \quad]x_1 - \epsilon, x_1 + \epsilon[\times \ldots \times]x_N - \epsilon, x_N + \epsilon[\times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots$$

On osoitettava, että nyt pätee $V \subseteq B_D(x, \epsilon)$. Valitaan mielivaltainen $y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Nyt kun $i \geq N$, niin pätee

$$\frac{d_R(x_i, y_i)}{i} \quad \leq \quad \frac{1}{N}.$$

Näin ollen

$$D(x, y) \quad \leq \quad \max\left\{\frac{d_R(x_1, y_1)}{1}, \ldots, \frac{d_R(x_N, y_N)}{N}, \frac{1}{N}\right\}.$$

Jos siis $y \in V$, niin $D(x, y) < \epsilon$, joten tällöin $y \in B_D(x, \epsilon)$. On siis todistettu, että $V \subseteq B_D(x, \epsilon)$.

Tarkastellaan sitten tulotopologian kannan joukkoa

$$U \quad = \quad \prod_{i \in \mathbb{N}} U_i,$$

missä U_i on avoin joukko $\mathbb{R}$:ssä äärelliselle joukolle indeksejä $i = j_1, \ldots, j_n$, ja $U_i = \mathbb{R}$ muille indekseille. Valitaan mielivaltainen $x \in U$ ja etsitään sellainen metriikan D määrittelemän topologian avoin joukko V, että tälle joukolle pätee $x \in V \subseteq U$. Valitaan jokaista indeksiä $i = j_1, \ldots, j_n$ kohti avoin väli $]x_i - \epsilon_i, x_i + \epsilon_i[\subseteq U_i$ siten, että jokaiselle ϵ_i pätee $\epsilon_i \leq 1$. Olkoon nyt

$$\epsilon \quad = \quad \min\{\, \frac{\epsilon_i}{i} \mid i = j_1, \ldots, j_n \,\}.$$

Nyt on osoitettava, että $x \in B_D(x, \epsilon) \subseteq U$. Valitaan mielivaltainen piste $y \in B_D(x, \epsilon)$. Nyt kaikille indekseille i pätee

$$\frac{d_R(x_i, y_i)}{i} \quad \leq \quad D(x, y) \quad < \quad \epsilon.$$

Näin ollen, kun $i = j_1, \ldots, j_n$, niin $\epsilon \leq \frac{\epsilon_i}{i}$, joten $d_R(x_i, y_i) < \epsilon_i \leq 1$. Täten $|x_i - y_i| < \epsilon_i$. Voidaan siis todeta, että y kuuluu joukkoon U. $\square$

Näin ollaan löydetty myös ääretön tuloavaruus, joka on metristyvä. Metristyvyyden osoittaminen sopivan metriikan avulla on kuitenkin usein vaikeaa, joten seuraavaksi pyritään löytämään metristyvyydelle sellaisia ehtoja, joiden tarkistaminen on yksinkertaisempaa.

Luku 4

Urysohnin metristyslause

Tässä luvussa tarkoituksena on esittää riittävä ehto topologisen avaruuden metristyvyydelle. Itse ehto on melko yksinkertainen, mutta sen todistaminen on verraten monimutkainen prosessi, ja sitä ennen pitääkin käsitellä muutama tärkeä apulause, sekä käydä läpi käytettävien topologisten työkalujen määritelmät.

4.1 Urysohnin lemma

Urysohnin lemma käsittelee suljettujen joukkojen erottamista avoimella kuvauksella tietynlaisissa topologisissa avaruuksissa. Tätä ominaisuutta käytetään myöhemmin hyödyksi varsinaisten metristyslauseiden todistamisessa.

Tarvitaan yksi apulause.

Apulause 4.1.1. *Topologinen avaruus X on normaali jos ja vain jos jokaisella suljetulla joukolla $A \subset X$ ja jokaisella avoimella joukolla $U \subseteq X$, jolle pätee $A \subset U$, on olemassa sellainen avoin joukko $V \subseteq X$, jolle pätee $A \subset V$ ja lisäksi $\overline{V} \subset U$.*

Todistus (kts. [5, s. 196]). Olkoon avaruus X normaali. Valitaan mielivaltainen suljettu joukko $A \subset X$ ja avoin joukko $U \subseteq X$, siten että $A \subset U$. Olkoon $F = X \setminus U$. Koska U on avoin, niin F on suljettu. Nyt siis normaalisuuden nojalla on olemassa sellaiset avoimet ja erilliset joukot $V, W \subseteq X$, että pätee $A \subset V$ ja $F \subset W$. Koska jokaisella pisteellä $y \in F$ on olemassa V:stä erillinen ympäristö (eli W), niin pätee $\overline{V} \cap F = \emptyset$. Täten $\overline{V} \subseteq U$.

Oletetaan sitten, että väitteen toinen puoli pätee. Valitaan mielivaltaiset suljetut joukot $A, B \subset X$ siten, että $A \cap B = \emptyset$. Olkoon $U = X \setminus B$. Koska B on suljettu, niin U on avoin. Oletuksen nojalla nyt on olemassa sellainen avoin joukko V, jolle pätee $A \subset V$ ja $\overline{V} \subset U$. Olkoon $W = X \setminus \overline{V}$. Koska $\overline{V}$ on suljettu, niin W on avoin. Nyt nähdään, että $A \subset V$, $B \subset W$ ja lisäksi $V \cap W = \emptyset$, joten X on normaali. □

Määritelmä 4.1.1. Olkoon X topologinen avaruus ja olkoon $A, B \subseteq X$, siten että $A \cap B = \emptyset$. Olkoon $f : X \to [a, b]$ jatkuva kuvaus, missä $a, b \in \mathbb{R}$ ja $a < b$. Sanotaan, että f on *Urysohnin kuvaus joukoille A ja B*, mikäli $f(A) = a$ ja $f(B) = b$.

Lause 4.1.1 (Urysohnin lemma)**.** *Olkoon X normaali topologinen avaruus ja olkoot A ja B sen erillisiä suljettuja joukkoja. Tällöin on olemassa Urysohnin kuvaus joukoille A ja B.*

Todistus (kts. [5, s. 207–210]). Koska jokaiselle reaalilukuvälille $[a, b]$ on olemassa bijektio väliltä $[0, 1]$, riittää tässä todistaa, että on olemassa haluttu Urysohnin kuvaus yksikkövälille $[0, 1]$. Todistuksen idea on konstruoida aluksi normaalisuutta käyttämällä rationaaliluvuilla indeksoitu perhe U_q avaruuden X avoimia joukkoja, ja tämän jälkeen käyttää näitä joukkoja halutun kuvauksen määrittelemiseen.

Olkoon $\mathbb{Q}_{[0,1]}$ kaikkien rationaalilukujen joukko välillä $[0, 1]$. Määritellään seuraavaksi (käyttäen apulausetta 4.1.1 ja rationaalilukujen numeroituvuutta) jokaista rationaalilukua $q \in \mathbb{Q}_{[0,1]}$ vastaava X:n avoin joukko U_q siten, että aina kun $q < r$, niin pätee $\overline{U_q} \subset U_r$.

Koska $\mathbb{Q}_{[0,1]}$ on numeroituva, voidaan joukot U_q määritellä rekursiivisesti. Järjestetään joukon $\mathbb{Q}_{[0,1]}$ luvut äärettömään jonoon siten, että ensimmäiset kaksi lukua ovat 1 ja 0. Määritellään joukot U_1 ja U_0 seuraavasti: Olkoon $U_1 = X \setminus B$. Koska U_1 on avoin joukko ja X normaali topologinen avaruus, niin apulauseen 4.1.1 nojalla voidaan valita U_0 siten, että $A \subset U_0$ ja $\overline{U_0} \subset U_1$.

Olkoon Q_p p:n ensimmäisen luvun joukko aikaisemmin mainitussa joukon $\mathbb{Q}_{[0,1]}$ lukujen jonossa. Tehdään induktio-oletus, että jokaiselle $q \in Q_p$ on mahdollista määritellä X:n avoin joukko U_q siten, että $\overline{U_q} \subset U_r$ aina kun $q < r$. Olkoon s p:n seuraaja aikaisemmin mainitussa jonossa. Nyt on siis tarpeen määritellä joukko U_s.

Olkoon $Q_{p+1} = Q_p \cup \{s\}$. Koska Q_{p+1} on äärellinen järjestetty joukko, on sen jokaisella alkiolla (poisluettuna suurin ja pienin alkio, eli siis 1 ja 0) yksiselitteinen edeltäjä ja yksiselitteinen seuraaja. Tässä $0 \neq s \neq 1$, joten on siis olemassa s:n edeltäjä $s^- \in Q_{p+1}$ sekä s:n seuraaja $s^+ \in Q_{p+1}$. Induktio-oletuksen nojalla on olemassa sellaiset X:n avoimet joukot U_{s^-} ja U_{s^+}, joille pätee $\overline{U_{s^-}} \subset U_{s^+}$. Näin ollen apulauseen 4.1.1 nojalla voidaan määritellä avoin joukko U_s siten, että $\overline{U_{s^-}} \subset U_s$ ja $\overline{U_s} \subset U_{s^+}$.

Nyt on mahdollista osoittaa, että ehto

$$q < r \quad \Rightarrow \quad \overline{U_q} \subset U_r$$

pätee kaikilla $q, r \in Q_{p+1}$. Jos nimittäin pätee $q, r \in Q_p$, niin tämä ehto pätee induktio-oletuksen nojalla. Jos näin ei ole, voidaan yksinkertaisuuden vuoksi olettaa, että $q = s$ ja $r \in U_p$. Tällöin on oltava joko $r \leq s^-$, jolloin pätee

$$\overline{U_r} \subseteq \overline{U_{s^-}} \subset U_s,$$

tai $r \geq s^+$, jolloin taas pätee

$$\overline{U_s} \subset \overline{U_{s^+}} \subseteq U_r.$$

Nyt ollaan siis induktioperiaatteen mukaisesti määritelty joukko U_q jokaiselle $q \in \mathbb{Q}_{[0,1]}$.

Määritellään seuraavaksi joukot U_q nollaa pienemmille ja ykköstä suuremmille rationaaliluvuille. Valitaan $U_q = \emptyset$, aina kun $q < 0$ ja $U_r = X$, aina kun $r > 1$. On helppoa todeta, että tämän laajennuksen jälkeen pätee edelleen ehto

$$q < r \quad \Rightarrow \quad \overline{U_q} \subset U_r.$$

Olkoon jokaista pistettä $x \in X$ vastaava joukko $Q(x)$ määritelty seuraavasti:

$$Q(x) \quad = \quad \{\, q \in \mathbb{Q} \mid x \in U_q \,\}.$$

Nyt jos $n < 0$, niin $n \notin Q(x)$ kaikilla $x \in X$, koska äskeisen määrittelyn mukaan tällöin $U_n = \emptyset$. Toisaalta jokaiselle $m > 1$ pätee $m \in Q(x)$, koska saman määrittelyn mukaan tässä $U_m = X$. Siis $Q(x)$ on alhaalta rajoitettu ja sen suurin alaraja kuuluu välille $[0, 1]$. Olkoon nyt

$$f(x) \quad = \quad \inf Q(x) \quad = \quad \inf\{\, q \in \mathbb{Q} \mid x \in U_q \,\}.$$

Nyt on enää osoitettava, että edellä määritelty kuvaus f on halutunlainen. On helppoa todeta, että $f(A) = 0$ ja $f(B) = 1$. Nimittäin, kun $x \in A$, niin $x \in U_q$ jokaisella $q \geq 0$. Niinpä $Q(x) = \mathbb{Q}_{\geq 0}$ ja täten $f(x) = \inf Q(x) = 0$. Toisaalta jos $x \in B$, niin $x \in U_q$ ei päde millään $q \leq 1$, joten $Q(x) = \mathbb{Q}_{\geq 1}$ ja $f(x) = 1$.

Kuvauksen f osoittaminen jatkuvaksi on hieman mutkikkaampaa. Todistetaan ensiksi seuraavat kaksi asiaa:

1) Jos $x \in \overline{U_q}$, niin $f(x) \leq q$.

2) Jos $x \notin U_q$, niin $f(x) \geq q$.

Kohdan 1) todistamiseksi todetaan ensiksi, että jos $x \in \overline{U_q}$, niin $x \in U_r$ jokaisella $r > q$. Niinpä joukko $Q(x)$ sisältää kaikki lukua q suuremmat rationaaliluvut. Määritelmän mukaan siis

$$f(x) \quad = \quad \inf Q(x) \quad \leq \quad q.$$

Kohdan 2) todistamiseksi taas voidaan todeta, että jos $x \notin U_q$, niin silloin $x \notin U_r$ kaikilla $r < q$. Niinpä joukko $Q(x)$ ei sisällä yhtään lukua q pienempää rationaalilukua, joten

$$f(x) \quad = \quad \inf Q(x) \quad \geq \quad q.$$

Nyt voidaan todistaa kuvauksen f jatkuvuus käyttäen näitä ominaisuuksia. Valitaan mielivaltainen piste $x_0 \in X$ ja avoin väli $]a, b[$ siten, että pätee $f(x_0) \in]a, b[$. On löydettävä sellainen avoin joukko U, että $f(U) \subseteq]a, b[$. Valitaan ensiksi rationaaliluvut q_1, q_2 siten, että

$$a < q_1 < f(x_0) < q_2 < b.$$

Olkoon nyt

$$U \quad = \quad U_{q_2} \setminus \overline{U_{q_1}}.$$

Nyt voidaan osoittaa, että joukko U on halutun kaltainen. Aikaisemmi todistetun ominaisuuden 2) perusteella $x_0 \in U_{q_2}$, ja toisaalta ominaisuuden 1) perusteella $x_0 \notin \overline{U_{q_1}}$. Niinpä tässä pätee $x_0 \in U$.

Olkoon nyt $y \in U$. Tällöin $y \in U_{q_2} \subset \overline{U_{q_2}}$, joten ominaisuuden 1) nojalla $f(y) \leq q_2$. Toisaalta $y \notin \overline{U_{q_1}}$, eli $y \notin U_{q_1}$. Niinpä ominaisuuden 2) nojalla tässä pätee $f(y) \geq q_1$. Nyt siis

$$f(y) \quad \in \quad [q_1, q_2] \quad \subset \quad]a, b[.$$

□

4.2 Urysohnin metristyslause

Tarkoituksena on nyt esittää riittävä ehto metristyvyydelle. Tämä tehdään esittämällä ensin todistus ns. Urysohnin upotuslauseelle, ja käyttämällä sitten tätä tulosta varsinaisen Urysohnin metristyslauseen todistamiseen.

4.2.1 Upotukset

Määritelmä 4.2.1. Olkoot X ja Y topologisia avaruuksia. Olkoon kuvaus $f : X \to Y$ bijektio. Jos sekä f että sen käänteiskuvaus f^{-1} ovat jatkuvia, niin sanotaan, että f on *homeomorfismi.*

Jos on olemassa homeomorfismi $f : X \to Y$, niin sanotaan että avaruudet X ja Y ovat *homeomorfiset.*

Huomataan, että tämän määritelmän mukaisesti homeomorfismi on bijektiivinen kuvaus, jossa joukko U on avoin jos ja vain jos sen kuva $f(U)$ on avoin. Homeomorfismi ei siis ole pelkästään yksi–yhteen-vastaavuus avaruuksien X ja Y välillä, vaan myös niiden avoimien joukkojen kokoelmien välillä (Kts. [5] s. 105).

Tästä seuraa, että mikä tahansa ominaisuus, joka liittyy yksiselitteisesti topologisen avaruuden X avoimiin joukkoihin, on olemassa myös niissä avaruuksissa, jotka ovat homeomorfisia avaruuden X kanssa.

Määritelmä 4.2.2. Olkoon topologisella avaruudella X ominaisuus Θ. Jos tällöin jokaisella X:n kanssa homeomorfisella avaruudella on myös ominaisuus Θ, niin sanotaan että Θ on *topologinen ominaisuus.*

Voidaan siis sanoa, että homeomorfismi on bijektiivinen kuvaus, joka säilyttää topologiset ominaisuudet.

Määritelmä 4.2.3. Olkoot X ja Y topologisia avaruuksia, ja olkoon kuvaus $f : X \to Y$ jatkuva injektio. Olkoon $Z = f(X) \subseteq Y$ varustettu normaalilla aliavaruustopologialla ja olkoon $f' : X \to Z$ bijektiivinen kuvaus, joka on saatu rajoittamalla f:n maalijoukkoa sen kuvaan. Jos tällöin f' on homeomorfismi, niin sanotaan että kuvaus f on *upotus* avaruudelta X avaruudelle Y.

Upotus on siis injektiivinen kuvaus, josta saadaan homeomorfismi rajoittamalla sen maalijoukko sen kuvajoukkoon.

Tässä luvussa todistetaan metristyvyyteen liittyviä tuloksia juuri upotusta apuna käyttämällä. Jotta tämä olisi mielekästä, on vielä osoitettava metristyvyyden olevan topologinen ominaisuus.

Lause 4.2.1. *Metristyvyys on topologinen ominaisuus. Toisin sanoen, jos X on metristyvä topologinen avaruus ja kuvaus $f : X \to Y$ on homeomorfismi, niin myös Y on metristyvä.*

Todistus (vrt. [3, s. 148]). Olkoon X metristyvä topologinen avaruus, jonka topologian indusoi metriikka d. Olkoon Y topologinen avaruus ja olkoon $f : X \to Y$ homeomorfismi. Valitaan mielivaltainen, epätyhjä avoin joukko $U \subseteq Y$. Koska f on homeomorfismi, niin joukko $f^{-1}(U) \subset X$ on avoin. Koska X on metristyvä ja sen topologian indusoi metriikka d, niin nyt on olemassa sellainen indeksijoukko J, että $f^{-1}(U) = \bigcup_{j \in J} B_d(x_j, r_j)$, missä $x_j \in X$ ja $r_j > 0$ kaikilla $j \in J$.

Määritellään nyt joukon Y metriikka d' seuraavasti:

$$d'(x, y) \quad = \quad d(f^{-1}(x), f^{-1}(y))$$

kaikilla $x, y \in Y$. Tällöin

$$\begin{aligned} U &= f(f^{-1}(U)) \\ &= f\Big(\bigcup_{j \in J} B_d(x_j, r_j)\Big) \\ &= \bigcup_{j \in J} f(B_d(x_j, r_j)) \\ &= \bigcup_{j \in J} B_{d'}(f(x_j), r_j). \end{aligned}$$

Voidaan siis yleistää, että jokainen Y:n avoin joukko voidaan esittää avoimien kuulien yhdisteenä metriikan d' suhteen, eli metriikka d' indusoi Y:n topologian. $\square$

4.2.2 Urysohnin upotuslause

Metristyvyydelle riittävän ehdon muodostamiseksi suurin hankaluus on nyt osoittaa, että tietyt ominaisuudet omaava topologinen avaruus voidaan aina upottaa johonkin metristyvään topologiseen avaruuteen (itse asiassa aina samaan). Tämä todistetaan seuraavaksi.

Lause 4.2.2 (Urysohnin upotuslause)**.** *Olkoon X säännöllinen topologinen avaruus, jolla on numeroituva kanta. Tällöin on olemassa sellainen kuvaus $f : X \to [0,1]^{\mathbb{N}}$, joka on upotus. Tässä Hilbertin kuutio $[0,1]^{\mathbb{N}}$ on varustettu $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$:n normaalin tulotopologian aliavaruuteensa indusoimalla topologialla.*

Todistus (vrt. [9, s. 132 – 133]). Koska X on N_2-avaruus, niin sillä on numeroituva kanta $\mathcal{B}$. Mikäli tyhjä joukko $\emptyset$, kuuluu kantaan $\mathcal{B}$, niin joukko $\mathcal{B}' = \mathcal{B} \setminus \{\emptyset\}$ on edelleen X:n topologian kanta. Niinpä voidaan olettaa, että tyhjä joukko $\emptyset$ ei kuulu kantaan $\mathcal{B}$.

Koska kanta $\mathcal{B}$ on numeroituva, niin on olemassa surjektiivinen kuvaus $\alpha : \mathbb{N} \to \mathcal{B}$. Niinpä voidaan määritellä

$$\mathcal{B} \quad = \quad \{\, \alpha(n) \mid n \in \mathbb{N} \,\}.$$

Koska X on säännöllinen ja kanta $\mathcal{B}$ ei sisällä tyhjää joukkoa, niin apulauseen 2.2.1 nojalla jokaiselle luonnolliselle luvulle $i \in \mathbb{N}$ on olemassa sellainen $j \in \mathbb{N}$, että pätee $\overline{\alpha(i)} \subset \alpha(j)$. Merkitään nyt

$$A \quad = \quad \{\, (i,j) \in \mathbb{N}^2 \mid \overline{\alpha(i)} \subset \alpha(j) \,\}.$$

Selvästi A on ääretön, mutta joukon $\mathbb{N}^2$ osajoukkona se on numeroituva. Näin ollen on olemassa bijektiivinen kuvaus $\beta : \mathbb{N} \to A$.

Valitaan mielivaltainen $m \in \mathbb{N}$. Merkitään $(i_m, j_m) = \beta(m) \in A$. Joukon A määritelmän mukaan nyt pätee

$$\overline{\alpha(i_m)} \quad \subset \quad \alpha(j_m).$$

Koska tässä joukko $\alpha(j_m)$ on kannan $\mathcal{B}$ alkio, se on avoin. Niinpä komplementti $X \setminus \alpha(j_m)$ on suljettu. Myös sulkeuma $\overline{\alpha(i_m)}$ on suljettu ja selvästi pätee

$$\overline{\alpha(i_n)} \cap \Big(X \setminus \alpha(j_n)\Big) \quad = \quad \emptyset.$$

Todetaan nyt, että koska X on säännöllinen ja sillä on numeroituva kanta, niin lauseen 2.2.6 nojalla X on normaali. Voidaan siis soveltaa Urysohnin lemmaa joukoille $\overline{\alpha(i_m)}$ ja $X \setminus \alpha(j_m)$. On siis olemassa sellainen jatkuva kuvaus $f_m : X \to [0,1]$, että $f_m(X \setminus \alpha(j_m)) = 0$ ja $f_m(\overline{\alpha(i_m)}) = 1$. Koska tässä m oli mielivaltainen, voidaan yleistää, että jokaiselle luonnolliselle luvulle $n \in \mathbb{N}$ on olemassa vastaavat ominaisuudet toteuttava kuvaus.

Määritellään nyt jokaiselle $x \in X$ kuvaus $\gamma_x : \mathbb{N} \to [0,1]$ seuraavasti:

$$\gamma_x(n) \quad = \quad f_n(x)$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Nyt jokainen kuvaus f_n kuvaa joukon X välille $[0,1]$. Tässä jokaiselle pisteelle $x \in X$ tuotetaan kuvaus $\gamma_x : \mathbb{N} \to [0,1]$, joka on siis Hilbertin kuution alkio. Voidaan täten määritellä kuvaus $f : X \to [0,1]^{\mathbb{N}}$ seuraavasti: $f(x) = \gamma_x$ kaikilla $x \in X$. Nyt täytyy vielä todistaa, että tämä kuvaus on lauseessa haettu upotus.

Osoitetaan ensin, että kuvaus f on injektio. Olkoon siis $x, y \in X$ ja $x \neq y$. Koska X on säännöllinen, niin se on myös T_1 ja siten myös T_0. Niinpä on olemassa avoin joukko $U \subset X$ siten, että $x \in U$ ja $y \notin U$. Edelleen on olemassa kannan $\mathcal{B}$ joukko $\alpha(j_x)$ siten, että $x \in \alpha(j_x) \subseteq U$.

Nyt aiemmin todistetun, sekä apulauseen 2.2.1 nojalla on olemassa sellainen $i_x \in \mathbb{N}$, että pätee

$$x \quad \in \quad \alpha(i_x) \quad \subset \quad \overline{\alpha(i_x)} \quad \subset \quad \alpha(j_x).$$

Niinpä aikaisemman määritelmän nojalla $(i_x, j_x) \in A$, ja täten kuvauksen β surjektiivisuuden perusteella on nyt olemassa sellainen $n_x \in \mathbb{N}$, että pätee $(i_x, j_x) = \beta(n_x)$. Kuvauksen f injektiivisyyden todistamiseksi riittää nyt osoittaa, että $\gamma_x \neq \gamma_y$, eli että $\gamma_x(n) \neq \gamma_y(n)$ jollakin $n \in \mathbb{N}$.

Pyritään nyt osoittamaan, että $\gamma_x(n_x) \neq \gamma_y(n_x)$, eli määritelmän mukaisesti että $f_{n_x}(x) \neq f_{n_x}(y)$. Aikaisemmin määritellyn nojalla tässä

$$f_{n_x}(X \setminus \alpha(j_x)) = 0 \quad \text{ja} \quad f_{n_x}(\overline{\alpha(i_x)}) = 1.$$

Niinpä koska $(i_x, j_x) \in A$, niin määritelmän mukaisesti $f_{n_x}(x) = 1$. Toisaalta aikaisemmin oletettiin, että $y \notin \alpha(j_x)$, joten $f_{n_x}(y) = 0$. Näin ollen kuvaus f on injektio.

Seuraavaksi on todistettava, että kuvaus $f : X \to [0,1]^{\mathbb{N}}$ on jatkuva. Olkoon kuvaus $\rho_n : [0,1]^{\mathbb{N}} \to [0,1]$ luonnollista lukua $n \in \mathbb{N}$ vastaava projektiokuvaus. Nyt jokaiselle $n \in \mathbb{N}$ ja jokaiselle $x \in X$ pätee

$$\rho_n \circ f(x) \quad = \quad \gamma_x(x) \quad = \quad f_n(x).$$

Näin ollen $\rho_n \circ f = f_n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Tämä todettiin aikaisemmin jatkuvaksi kuvaukseksi. Voidaan siis todeta, että f:n ja projektion ρ_n yhdistetty kuvaus on jatkuva kaikilla $n \in \mathbb{N}$, joten f on jatkuva.

On vielä osoitettava, että kuvaus $f^{-1} : f(X) \to X$ on jatkuva. Valitaan mielivaltainen piste $p \in f(X) \subseteq [0,1]^{\mathbb{N}}$. Nyt riittää osoittaa, että kuvaus f^{-1} on jatkuva pisteessä p.

Olkoon $U \subseteq X$ avoin joukko siten, että $x = f^{-1}(p) \in U$. Täytyy vain löytää sellainen pisteen p sisältävä avoin joukko $V \in [0,1]^{\mathbb{N}}$, että pätee

$$f^{-1}(V \cap f(X)) \quad \subseteq \quad U.$$

Kuten aikaisemminkin, on mahdollista löytää sellaiset $i_x, j_x \in A$, että kannan $\mathcal{B}$ joukoille $\alpha(i_x)$ ja $\alpha(j_x)$ pätee

$$f^{-1}(p) \quad \in \quad \alpha(i_x) \quad \subset \quad \overline{\alpha(i_x)} \quad \subset \quad \alpha(j_x) \quad \subset \quad U.$$

Edelleen on olemassa sellainen $n_x \in \mathbb{N}$, että $(i_x, j_x) = \beta(n_x)$. Tarkastellaan nyt projektiokuvausta $\rho_{n_x} : [0,1]^{\mathbb{N}} \to [0,1]$. Tämä kuvaus on jatkuva, ja väli $]0,1]$ on avoin joukossa $[0,1]$. Näin ollen voimme valita joukon V seuraavasti:

$$V \quad = \quad \rho_{n_x}^{-1}(]0,1]).$$

Jotta tämä valinta kelpaisi, on ensin osoitettava, että $p \in V$. On todistettava, että pätee $\rho_{n_x}(p) \in]0,1]$. Todetaan siis, että määritelmän mukaisesti

$$\rho_{n_x}(p) \quad = \quad \rho_{n_x}(f(x)) \quad = \quad \gamma_x(n_x) \quad = \quad f_{n_x}(x) \quad = \quad 1.$$

Nyt on vielä osoitettava, että pätee

$$f^{-1}(V \cap f(X)) \quad \subseteq \quad U.$$

Valitaan mielivaltainen piste $y \in f^{-1}(V \cap f(x))$. Täytyy osoittaa, että pätee $y \in U$. Ensin voidaan todeta, että selvästi pätee $f(y) \in V$. Niinpä joukon V määritelmään perusteella voidaan todeta, että

$$\rho_{n_x}(f(y)) \quad \in \quad]0,1].$$

Toisaalta aikaisemmin todetun, sekä projektiokuvauksen määritelmän nojalla tällöin pätee

$$\rho_{n_x}(f(y)) \quad = \quad \gamma_y(n_x) \quad = \quad f_{n_x}(y),$$

josta seuraa, että $f_{n_x}(y) \in]0,1]$. Niinpä voidaan edelleen todeta, että pätee $y \notin X \setminus \alpha(j_x)$, eli $y \in \alpha(j_x)$. Ja koska tässä $\alpha(j_x) \subset U$, niin myös $y \in U$. $\square$

4.2.3 Urysohnin metristyslause

Tässä vaiheessa ollaan todistettu jo niin paljon, että itse Urysohnin metristyslauseen todistamiseen ei enää vaadita paljon.

Lause 4.2.3 (Urysohnin metristyslause)**.** *Jos X on säännöllinen topologinen avaruus, jolla on numeroituva kanta, niin X on metristyvä.*

Todistus. Aikaisemmin todettiin, että jos X:llä on mainitut ominaisuudet, niin X voidaan upottaa Hilbertin kuutioon. Koska Hilbertin kuutio on avaruuden $\mathbb{R}^n$ aliavaruus, niin se on metristyvä luvussa 3 todetun ja apulauseen 1.3.1 nojalla.

Upotuksen määritelmän nojalla nyt on siis olemassa homeomorfismi mainitut ominaisuudet omaavan topologisen avaruuden ja jonkin metristyvän avaruuden välillä. Niinpä lauseen 4.2.1 nojalla voidaan todeta, että väite pätee.

$\square$

Tämä oli siis riittävä ehto avaruuden metristyvyydelle. Tässä vaiheessa voidaan todeta (ja itse asiassa myöhemmin todistetaan), että metristyvä avaruus on aina normaali. Metristyvällä avaruudella ei kuitenkaan aina ole numeroituvaa kantaa, tästä vastaesimerkkinä toimii avaruus $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, jonka metristyvyys todettiin aiemmin. Niinpä tämä ei ole vielä välttämätön ehto metristyvyydelle. Sellaiseen ehtoon päästään seuraavassa luvussa.

Luku 5

Nagatan–Smirnovin metristyslause

Nyt ollaan tilanteessa, jossa ainoa jäljellä oleva tavoite on muotoilla riittävä ja välttämätön ehto metristyvyydelle. Aikaisemmin huomattiin, että metristyvällä avaruudella ei välttämättä ole numeroituvaa kantaa, joten tarvitaan sellainen ominaisuus topologian kannalle, joka välttämättä seuraa metristyvyydestä. Tämän jälkeen voidaan todistaa haluttu ehto.

5.1 Lokaalisti äärelliset joukot

Kuten aikaisemmin todettiin, ero metristyvyyden riittävän ehdon ja riittävän ja välttämättömän ehdon välillä piilee käsiteltävän avaruuden kannassa. On siis tarpeen esitellä muutamia määritelmiä, joita tullaan myöhemmin hyödyntämään tämän luvun metristyslauseessa.

Määritelmä 5.1.1. Olkoon X topologinen avaruus ja olkoon $\mathcal{A}$ kokoelma X:n osajoukkoja. Sanotaan, että $\mathcal{A}$ on *lokaalisti äärellinen* avaruudessa X, mikäli jokaisella pisteellä $x \in X$ on olemassa ympäristö, joka leikkaa vain äärellistä määrää $\mathcal{A}$:n joukkoja.

Esimerkki 5.1.1. Varustetaan avaruus $\mathbb{R}$ tavanomaisella topologialla. Nyt kokoelma

$$\mathcal{A} \quad = \quad \{\,]n, n+2[\mid n \in \mathbb{Z} \,\}$$

on lokaalisti äärellinen $\mathbb{R}$:ssä. Kokoelma

$$\mathcal{B} \quad = \quad \{\,]0, \frac{1}{n}[\mid n \in \mathbb{Z} \,\}$$

on lokaalisti äärellinen aliavaruudessa $]0,1[$, mutta ei koko $\mathbb{R}$:ssä. Onhan selvää, että jokainen origon ympäristö leikkaa äärettömän monta $\mathcal{B}$:n joukkoa.

Apulause 5.1.1. *Olkoon $\mathcal{A}$ lokaalisti äärellinen kokoelma avaruuden X osajoukkoja. Tällöin jokainen $\mathcal{A}$:n alikokoelma on lokaalisti äärellinen X:ssä.*

Todistus. Triviaali. □

Apulause 5.1.2. *Olkoon $\mathcal{A}$ lokaalisti äärellinen kokoelma avaruuden X osajoukkoja. Tällöin $\mathcal{A}$:n joukkojen sulkeumien kokoelma*

$$\mathcal{B} \quad = \quad \{\, \overline{A} \mid A \in \mathcal{A} \,\}$$

on lokaalisti äärellinen X:ssä.

Todistus (kts. [5, s. 245]). Jos joukko V leikkaa $\mathcal{A}$:n joukkoa A, niin se leikkaa myös sulkeumaa $\overline{A}$. Valitaan mielivaltainen $x \in X$ ja sen ympäristö U. Nyt U leikkaa vain äärellistä määrää $\mathcal{A}$:n joukkoja $A_1, \ldots, A_n$. Toisaalta U leikkaa korkeintaan yhtä monta $\mathcal{B}$:n joukkoa $\overline{A_1}, \ldots, \overline{A_n}$. Näitä joukkoja voi myös olla vähemmän, sillä vaikka olisikin $A_i \neq A_j$, voi silti päteä $\overline{A_i} = \overline{A_j}$. □

Apulause 5.1.3. *Olkoon $\mathcal{A}$ lokaalisti äärellinen kokoelma avaruuden X osajoukkoja. Tällöin pätee*

$$\overline{\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A} \quad = \quad \bigcup_{A \in \mathcal{A}} \overline{A}.$$

Todistus (kts. [5, s. 245]). Merkitään Y:llä kokoelman $\mathcal{A}$ joukkojen yhdistettä,

$$Y \quad = \quad \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A.$$

Yleisesti pätee, että jos $x \in \bigcup \overline{A}$, niin myös $x \in \overline{Y}$. Niinpä määritelmän mukaisesti $\bigcup \overline{A} \subseteq \overline{Y}$. Riittää siis todistaa osajoukkous toiseen suuntaan siinä tapauksessa, että $\mathcal{A}$ on lokaalisti äärellinen.

Valitaan mielivaltainen $x \in \overline{Y}$. Olkoon U sellainen x:n ympäristö, joka leikkaa $\mathcal{A}$:n joukkoja $A_1, \ldots, A_n$. Tehdään vastaoletus, että x ei kuulu mihinkään joukoista $\overline{A_1}, \ldots, \overline{A_n}$. Nyt joukko $U \setminus (\overline{A_1} \cup \ldots \cup \overline{A_n})$ on x:n ympäristö, joka ei leikkaa yhtään kokoelman $\mathcal{A}$ joukkoa. Niinpä se ei siis leikkaa joukkoa Y, mikä on ristiriita. On siis todettava, että piste x kuuluu johonkin joukkoon $\overline{A_i}$. □

Lokaalisti äärellisen joukon määritelmää on helppo muokata niin, että saadaan vastaava käsite myös indeksoidulle perheelle.

Määritelmä 5.1.2. Olkoon X topologinen avaruus. Indeksoidun perheen $(A_j)_{j \in J}$ sanotaan olevan *lokaalisti äärellinen indeksoitu perhe* X:ssä, mikäli jokaisella pisteellä $x \in X$ on olemassa ympäristö, joka leikkaa joukkoa A_i vain äärellisen monella indeksillä $i \in J$.

Apulause 5.1.4. *Indeksoitu perhe $(A_j)_{j \in J}$ on lokaalisti äärellinen indeksoitu perhe X:ssä jos ja vain jos kokoelma $\{ A_i \mid i \in J \}$ on lokaalisti äärellinen X:ssä ja lisäksi jokaisella X:n osajoukolla B pätee, että $B = A_i$ vain äärellisen monella indeksillä $i \in J$.*

Todistus. Triviaali. □

Pelkkä lokaalisti äärellisen kokoelman tai indeksoidun perheen määritelmä ei vielä riitä työkaluksi metristyvyyden välttämättömän ehdon käsittelyssä. Tästä syystä on vielä otettava käyttöön *numeroituvasti lokaalisti äärellisen* kokoelman määritelmä. Tässä idea on esittää käsiteltävä kokoelma lokaalisti äärellisten kokoelmien numeroituvana yhdisteenä.

Määritelmä 5.1.3. Olkoon X topologinen avaruus, ja olkoon $\mathcal{B}$ kokoelma X:n osajoukkoja. Sanotaan, että $\mathcal{B}$ on *numeroituvasti lokaalisti äärellinen* tai *σ-lokaalisti äärellinen*, mikäli se voidaan ilmaista lokaalisti äärellisten kokoelmien numeroituvana yhdisteenä, eli

$$\mathcal{B} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{B}_i,$$

missä indeksijoukko I on numeroituva ja $\mathcal{B}_i$ on lokaalisti äärellinen kaikilla $i \in I$.

Numeroituva osajoukkojen kokoelma on aina σ-lokaalisti äärellinen, ja samoin on lokaalisti äärellinen kokoelma (Kts. [5] s. 245).

Määritelmä 5.1.4. Olkoon X topologinen avaruus ja olkoon $\mathcal{A}$ kokoelma sen osajoukkoja. Olkoon myös $\mathcal{B}$ kokoelma X:n osajoukkoja. Mikäli jokaiselle joukolle $B \in \mathcal{B}$ on olemassa joukko $A \in \mathcal{A}$ siten, että $B \subseteq A$, niin sanotaan että kokoelma $\mathcal{B}$ on kokoelman $\mathcal{A}$ *tihennys*, tai että $\mathcal{B}$ *tihentää* $\mathcal{A}$:n. Mikäli tämän lisäksi kaikki $\mathcal{B}$:n joukot ovat avoimia, niin sanotaan että $\mathcal{B}$ on $\mathcal{A}$:n *avoin tihennys*. Jos taas kaikki $\mathcal{B}$:n joukot ovat suljettuja, niin sanotaan että $\mathcal{B}$ on $\mathcal{A}$:n *suljettu tihennys*.

Seuraavan apulauseen todistuksessa käytetään niinsanottua *hyvän järjestyksen lausetta*. Sen mukaan jokainen joukko voidaan hyvinjärjestää, eli jokaisella joukolla X on olemassa sellainen järjestys $\prec$, että jokaisella X:n epätyhjällä osajoukolla on järjestyksen $\prec$ suhteen yksiselitteinen pienin alkio.

Hyvän järjestyksen lause on itse asiassa yhtäpitävä valinta-aksiooman ja siten myös useammin sovelletun *Zornin lemman* kanssa (Kts. [9], s. 170–173). Nämä ovat sellaista joukko-oppia, jonka tarkempi käsittely ei tämän tutkielman aiheen kannalta ole mielenkiintoista, joten tässä yhteydessä hyvän järjestyksen lause oletetaan tunnetuksi.

Apulause 5.1.5. *Olkoon X metristyvä topologinen avaruus. Jos $\mathcal{A}$ on X:n avoin peite, niin on olemassa X:n avoin peite $\mathcal{E}$, joka on $\mathcal{A}$:n tihennys ja joka on numeroituvasti lokaalisti äärellinen.*

Todistus (kts. [5, s. 246 – 247]). Hyvän järjestyksen lauseen perusteella kokoelmalle $\mathcal{A}$ on olemassa hyvä järjestys. Olkoon $<$ tällainen järjestys. Merkitään kokoelman $\mathcal{A}$ joukkoja yleisesti kirjaimilla $U, V, W, \ldots$

Olkoon d metriikka, joka indusoi X:n topologian. Valitaan $m \in \mathbb{Z}_+$. Määritellään kaikille $U \in \mathcal{A}$ joukko $S_m(U)$ seuraavasti:

$$S_m(U) \quad = \quad \{\, x \mid B_d(x, \frac{1}{m}) \subseteq U\}.$$

Joukko $S_m(U)$ on siis niiden pisteiden joukko, joiden ympäröimä avoin $\frac{1}{m}$-säteinen kuula mahtuu U:n sisään. Käytetään nyt järjestystä $<$ vielä pienemmän joukon määrittelemiseen. Olkoon

$$T_m(U) \quad = \quad S_m(U) \setminus \bigcup_{V<U} V.$$

On helppoa nähdä, että joukot $T_m(U)$ ja $T_m(V)$ ovat erillisiä kaikilla joukoilla $U, V \in \mathcal{A}$. Itse asiassa yleisesti pätee, että $d(T_m(U), T_m(V)) \geq \frac{1}{m}$.

Joukot $T_m(U)$ eivät kuitenkaan välttämättä ole avoimia, joten tämä ei ole vielä haluttu kokoelma $\mathcal{E}$. Laajennetaan siis jokaista joukkoa $T_m(U)$ hieman muodostaen näin avoin joukko $E_m(U)$. Määritellään

$$E_m(U) \quad = \quad \bigcup_{x \in T_m(U)} B_d(x, \frac{1}{3m})$$

kaikilla $U \in \mathcal{A}$. Tässä kaikilla $U, V \in \mathcal{A}$ pätee $d(E_m(U), E_m(V)) \geq \frac{1}{3m}$. Lisäksi huomataan, että $E_m(V) \subseteq V$ jokaisella $V \in \mathcal{A}$.

Määritellään nyt

$$\mathcal{E}_m \quad = \quad \{ E_m(U) \mid U \in \mathcal{A} \}.$$

Aikaisemmin todetun nojalla pätee, että $\mathcal{E}_m$ on $\mathcal{A}$:n tihennys. Huomataan, että minkä tahansa pisteen $x \in X$ ympäristö $B_d(x, \frac{1}{6m})$ voi leikata korkeintaan yhtä joukkoa $E_m(U)$, joten $\mathcal{E}_m$ on lokaalisti äärellinen. Jokainen joukko $E_m(U)$ on avoimien kuulien yhdisteenä avoin. Voidaan siis todeta, että $\mathcal{E}_m$ on lokaalisti äärellinen $\mathcal{A}$:n avoin tihennys.

$\mathcal{E}_m$ ei kuitenkaan ole vielä haluttu kokoelma, sillä se ei välttämättä ole X:n peite. Määritellään siis

$$\mathcal{E} \quad = \quad \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_+} \mathcal{E}_n$$

ja osoitetaan, että $\mathcal{E}$ on X:n peite.

Valitaan mielivaltainen $x \in X$. Koska kokoelma $\mathcal{A}$ on X:n peite, voidaan valita sellainen joukko U, joka on järjestyksessä $<$ ensimmäinen $\mathcal{A}$:n joukko, jolle pätee $x \in U$. Koska U on avoin, voidaan valita sellainen $m \in \mathbb{Z}_+$, että $B(x, \frac{1}{m}) \subseteq U$. Määritelmän nojalla nyt pätee $x \in S_m(U)$. Koska U oli järjestyksessä $<$ ensimmäinen x:n sisältävä joukko, pätee myös $x \in T_m(U)$. Niinpä x kuuluu myös joukkoon $E_m(U) \in \mathcal{E}_m \subset \mathcal{E}$. Voidaan siis yleistää, että $\mathcal{E}$ on X:n peite, joka on määritelmän mukaisesti numeroituvasti lokaalisti äärellinen. $\square$

5.2 Täysin normaalit avaruudet

Vielä on tarpeen käsitellä jokunen määritelmä ja apulause, jota tullaan käyttämään tulevissa todistuksissa.

Määritelmä 5.2.1. Olkoon X topologinen avaruus. Sanotaan, että joukko $A \subseteq X$ on G_δ, mikäli se on leikkaus numeroituvasta joukosta X:n avoimia joukkoja.

Mikäli A taas on unioni numeroituvasta joukosta X:n suljettuja joukkoja, niin sanotaan että A on F_σ.

Lause 5.2.1. *Olkoon X metristyvä avaruus. Tällöin seuraavat ehdot pätevät.*

1) Jokainen X:n suljettu joukko on G_δ.

2) Jokainen X:n avoin joukko on F_σ.

Todistus (Vrt. [3, s. 153]). Olkoon X topologinen avaruus ja olkoon d metriikka, joka indusoi sen topologian. Todistetaan ensiksi kohta 1.

Olkoon $A \subseteq X$ suljettu joukko. Määritellään joukko U_n seuraavasti:

$$U_n = \{ x \in X \mid d(x, A) < \frac{1}{n} \}$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Tällöin

$$A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n.$$

Luonnollisten lukujen joukko on tietenkin numeroituva, joten A on leikkaus numeroituvasta joukosta avoimia joukkoja.

Kohdan 2 todistamiseksi riittää todeta, että kohdan 1 perusteella jokaiselle avoimelle joukolle B pätee:

$$B = X \setminus (X \setminus B) = X \setminus \Big(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n \Big) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (X \setminus U_n).$$

□

Seuraavaa määritelmää käytetään tässä tutkielmassa puhtaasti kielellisistä syistä sekä merkintöjen helpottamiseksi.

Määritelmä 5.2.2. Olkoon X topologinen avaruus. Jos X on T_4, ja lisäksi X:n jokainen suljettu joukko on G_δ, niin sanotaan, että X on *täysin normaali*.

Kuten arvata saattaa, tämä on eräs välttämätön ehto topologisen avaruuden metristyvyydelle. Tämän todistamiseen tarvitaan yksi apulause.

Apulause 5.2.1. *Olkoon X metrinen avaruus, jonka topologian indusoi metriikka d. Olkoon $A \subseteq X$ ja olkoon $\mathbb{R}_{\geq 0}$ varustettu reaalilukujen normaalilla topologialla. Nyt kuvaus $f : X \to \mathbb{R}_{\geq 0},\ f(x) = d(x, A)$ on jatkuva.*

Todistus (Vrt. [3, s. 150]). Avaruudella $\mathbb{R}_{\geq 0}$ on seuraavanlainen kanta:

$$\mathcal{B} \quad = \quad \{\, [0, r[\mid r \in \mathbb{R}_+ \,\} \cup \{\,]p, q[\mid p, q \in \mathbb{R}_+ \,\}.$$

Niinpä tässä riittää osoittaa, että jokaisen muotoa $[0, r[$ tai muotoa $]p, q[$ olevan joukon alkukuva on avoin.

Valitaan mielivaltainen $B \in \mathcal{B}$, joka on muotoa $[0, r[$. Nyt

$$f^{-1}(B) \quad = \quad \bigcup_{a \in A} B_d(a, r).$$

Tämä joukko on selvästi avoin.

Valitaan sitten mielivaltainen $B \in \mathcal{B}$, joka on muotoa $]p, q[$. Jos tästä seuraa, että $f^{-1}(B)$ on tyhjä, niin $f^{-1}(B)$ on avoin. Oletetaan siis, että $f^{-1}(B) \neq \emptyset$. Olkoon $x \in f^{-1}(B)$. Nyt on olemassa sellainen $c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, että $c = d(x, A)$ ja toisaalta on olemassa sellainen $\epsilon \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, että $c - \epsilon, c + \epsilon \in B$. Itse asiassa tällöin pätee $c' \in B$ aina kun $c - \epsilon \leq c' \leq c + \epsilon$.

Tarkastellaan avointa kuulaa $B_d(x, \epsilon)$. Kun $y \in B_d(x, \epsilon)$, niin apulauseen 1.1.1 nojalla pätee:

$$|d(y, A) - d(x, A)| \quad \leq \quad d(x, y) \quad \leq \quad \epsilon.$$

Tämän perusteella voidaan todeta, että $c - \epsilon \leq d(y, A) \leq c + \epsilon$, ja niinpä $f(y) \in B$. Näin ollen $B_d(x, \epsilon) \in f^{-1}(B)$. Eli $f^{-1}(B)$ on avoin. □

Seuraavaksi esitellään vielä yksi välttämätön ehto topologisen avaruuden metristyvyydelle.

Lause 5.2.2. *Metristyvä avaruus on täysin normaali.*

Todistus (kts. [3, s. 182]). Määritelmän toinen puoli on todistettu jo apulauseessa 5.2.1, joten tässä riitää osoittaa, että metristyvä avaruus on normaali.

Esimerkin 2.2.2 todistuksen ja lauseen 2.2.2 nojalla yksiöt ovat suljettuja metrisestyvässä avaruudessa.

Olkoon nyt X metristyvä avaruus ja d metriikka, joka indusoi sen topologian. Olkoot lisäksi joukot $A, B \subseteq X$ suljettuja siten, että $A \cap B = \emptyset$. Nyt siis $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$, joten

$$\epsilon = d(A, B) = \inf\{\, d(a, b) \mid a \in A,\ b \in B \,\} > 0.$$

Koska apulauseen 5.2.1 mukaan kuvaukset $f : X \to \mathbb{R}_{\geq 0},\ f(x) = d(x, A)$ ja $g : X \to \mathbb{R}_{\geq 0},\ g(x) = d(x, B)$ ovat jatkuvia, niin joukot

$$U \quad = \quad \{\, x \in X \mid f(x) < \frac{\epsilon}{2} \,\} \quad = \quad f^{-1}([0, \frac{\epsilon}{2}[)$$

ja

$$V \quad = \quad \{\, y \in X \mid g(y) < \frac{\epsilon}{2} \,\} \quad = \quad g^{-1}([0, \frac{\epsilon}{2}[)$$

ovat avoimia. Lisäksi selvästi $A \subseteq U$ ja $B \subseteq V$ sekä $U \cap V = \emptyset$. □

Apulause 5.2.2. *Olkoon X säännöllinen topologinen avaruus ja olkoon $\mathcal{B}$ sen kanta, joka on numeroituvasti lokaalisti äärellinen. Tällöin X on täysin normaali.*

Todistus (kts. [5, s. 249–250]). Olkoon $W \subseteq X$ avoin. Osoitetaan, että on olemassa numeroituva avoimien joukkojen kokoelma $\{U_n\}$, siten että

$$W \quad = \quad \bigcup U_n \quad = \quad \bigcup \overline{U_n}.$$

Koska kanta $\mathcal{B}$ on numeroituvasti lokaalisti äärellinen, niin se voidaan kirjoittaa lokaalisti äärellisten kokoelmien $\mathcal{B}_n$ numeroituvana yhdisteenä. Olkoon jokaiselle indeksille n $\mathcal{C}_n$ niiden joukkojen B kokoelma, joille pätee $B \in \mathcal{B}_n$ ja $\overline{B} \subset W$. Nyt $\mathcal{C}_n$ on apulauseen 5.1.1 nojalla lokaalisti äärellinen. Merkitään

$$U_n \quad = \quad \bigcup_{B \in \mathcal{C}_n} B.$$

Tällöin U_n on avoimien joukkojen yhdisteenä avoin ja apulauseen 5.1.3 nojalla pätee

$$\overline{U_n} \quad = \quad \bigcup_{B \in \mathcal{C}_n} \overline{B}.$$

Näin ollen pätee $\overline{U_n} \subset W$, joten

$$\bigcup U_n \quad \subset \quad \bigcup \overline{U_n} \quad \subset \quad W.$$

Osajoukkouden todistamiseksi toiseen suuntaan valitaan mielivaltainen piste $x \in W$. Koska X on säännöllinen, niin lauseen 2.2.1 perusteella on olemassa sellainen kannan $\mathcal{B}$ alkio B, että pätee $x \in B$ ja $\overline{B} \subset W$. Nyt siis $B \in \mathcal{B}_n$ jollakin indeksillä n. Määritelmän mukaisesti siis $x \in \mathcal{C}_n$, joten myös $x \in U_n$. Voidaan siis yleistää kaikille $x \in X$:

$$x \in W \quad \Rightarrow \quad x \in \bigcup U_n.$$

Näin ollaan siis todistettu, että jokainen X:n avoin joukko on F_σ, joten lauseen 5.2.1 todistuksen nojalla jokainen X:n suljettu joukko on tällöin G_δ.

Vielä on osoitettava, että X on normaali. Valitaan siis mielivaltaiset erilliset suljetut joukot C ja D. Aikaisemmin todistetun nojalla komplementti $X \setminus D$ voidaan esittää avoimien joukkojen numeroituvana kokoelmana $\{U_n\}$, siten että $\bigcup U_n = \bigcup \overline{U_n} = X \setminus D$. Kokoelma $\{U_n\}$ peittää joukon C ja lisäksi jokainen joukko $\overline{U_n}$ on D:stä erillinen. Samaan tapaan voidaan muotoilla joukon D peittävä avoimien joukkojen numeroituva kokoelma $\{V_n\}$, siten että jokainen sulkeuma $\overline{V_n}$ on erillinen C:stä.

Nyt voidaan käyttää täysin samaa periaatetta kuin lauseessa 2.2.6. Määritellään siis

$$U'_n \quad = \quad U_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \overline{V_i} \qquad \text{ja} \qquad V'_n \quad = \quad V_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \overline{U_i}.$$

Nyt siis joukot

$$U' \quad = \quad \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_+} U'_n \qquad \text{ja} \qquad V' \quad = \quad \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_+} V'_n$$

ovat erilliset joukot jotka sisältävät joukot C ja D. □

Apulause 5.2.3. *Olkoon X normaali topologinen avaruus ja olkoon $A \subseteq X$ suljettu G_δ-joukko. Tällöin on olemassa jatkuva kuvaus $f : X \to [0,1]$, jossa jokaiselle pisteelle $x \in A$ pätee $f(x) = 0$ ja jokaiselle pisteelle $y \notin A$ pätee $f(y) > 0$.*

Todistus (kts. [5, s. 250]). Koska A on G_δ, niin se voidaan kirjoittaa avoimien joukkojen U_n yhdisteenä, missä $n \in \mathbb{Z}_+$. Valitaan jokaiselle indeksille n sellainen jatkuva kuvaus $f_n : X \to [0,1]$, jolle $f_n(x) = 0$, kun $x \in A$ ja

$f_n(x) = 1$, kun $x \in X \setminus U_n$. Tällainen kuvaus on aina olemassa Urysohnin lemman nojalla. Määritellään

$$f(x) \quad = \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \frac{f_n(x)}{2^n}.$$

Määrittelyssä käytetty sarja on tasaisesti suppeneva, joten tämä kuvaus on jatkuva. On myös helppoa nähdä, että kuvaus täyttää muut lauseen ehdot, eli se on positiivinen A:n ulkopuolella ja nolla A:ssa. □

5.3 Nagatan–Smirnovin metristyslause

Tähän mennessä ollaan todistettu kaikki tarvittava, jotta voidaan siirtyä tämän tutkielman päätulokseen, Nagatan–Smirnovin metristyslauseeseen. Todistus on melko mutkikas, ja siinä tullaan käyttämään hyväksi lähestulkoon kaikkea tässä tutkielmassa aiemmin todistettua.

Lause 5.3.1 (Nagatan–Smirnovin metristyslause)**.** *Topologinen avaruus X on metristyvä jos ja vain jos se on säännöllinen ja sillä on numeroituvasti lokaalisti äärellinen kanta.*

Todistus (kts. [5, s. 250–252]). Oletetaan ensin, että X on säännöllinen topologinen avaruus, jolla on σ-lokaalisti äärellinen kanta $\mathcal{B}$. Nyt X on täysin normaali apulauseen 5.2.2 perusteella. Osoitetaan X:n metristyvyys upottamalla se metrisetyvään avaruuteen $\mathbb{R}^J$, missä topologiana on luvussa 3 määritellyn tasaisen metriikan d_T indusoima topologia ja J on mielivaltainen indeksijoukko.

Olkoon $\mathcal{B} = \bigcup \mathcal{B}_n$, jossa kokoelma $\mathcal{B}_n$ on lokaalisti äärellinen jokaisella indeksillä n. Nyt voidaan apulauseen 5.2.3 nojalla valita jokaista positiivista kokonaislukua n ja jokaista kannan joukkoa $B \in \mathcal{B}_n$ vastaava jatkuva kuvaus

$$f_{n,B} : X \to [0, \frac{1}{n}],$$

missä $f_{n,B}(x) > 0$ jokaiselle $x \in B$ ja $f_{n,B}(x) = 1$ kaikilla $x \notin B$. Kun valitaan mielivaltainen piste x_0 ja sen ympäristö U, niin on olemassa kannan $\mathcal{B}$ joukko B siten, että $x \in B \subseteq U$. Tässä $B \in \mathcal{B}_n$ jollain indeksillä n, joten nyt $f_{n,B}(x_0) > 0$ ja $f_{n,B}(x) = 0$, kun $x \in X \setminus U$. Voidaan siis todeta, että kokoelma $\{ f_{n,B} \mid n \in \mathbb{Z}_+,\ B \in \mathcal{B}_n \}$ erottaa pisteet suljetuista joukoista avaruudessa X.

Olkoon $J \subseteq \mathbb{Z}_+ \times \mathcal{B}$ niiden parien (n, B) joukko, joilla B on jokin kokoelman $\mathcal{B}_n$ alkio. Määritellään kuvaus

$$F : X \to [0,1]^J$$

seuraavan yhtälön mukaisesti:

$$F(x) \quad = \quad (f_{n,B}(x))_{(n,B)\in J}.$$

Nyt kuvaus F on on on upotus avaruudelle $[0,1]^J$, kun $[0,1]^J$ on varustettu tulotopologialla. Tämä seuraa Urysohnin metristyslauseen todistuksesta. Avaruuden X metristyvyyden todistamiseen tämä ei kuitenkaan riitä, sillä vielä ei ole todistettu avaruuden $[0,1]^J$ metristyvyyttä siinä tapauksessa, että indeksijoukko J on ääretön. Täytyy siis kehittää upotus jollekin sellaiselle avaruudelle, joka varmasti tiedetään metristyväksi.

Varustetaan avaruus $[0,1]^J$ tasaisen metriikan indusoimalla topologialla, ja osoitetaan, että kuvaus F on upotus myös tällä topologialla varustettuun avaruuteen. Pannaan merkille, että kaikilla $x \in X$ pätee $f_{n,B} < \frac{1}{n}$. Koska tasainen topologia on hienompi kuin tulotopologia, niin kuvaus F on injektiivinen tasaisen metriikan suhteen ja kuvaa avaruuden X avoimet joukot kuvajoukon $Z = F(X)$ avoimille joukoille. On siis vielä todistettava, että F on jatkuva.

Avaruuden $\mathbb{R}^J$ aliavaruudessa $[0,1]^J$ tasainen metriikka d_T on sama kuin metriikka

$$\rho((x_\alpha),(y_\alpha)) \quad = \quad \sup\{|x_\alpha - y_\alpha|\}.$$

Valitaan nyt mielivaltainen piste $x_0 \in X$ ja luku $\epsilon > 0$, sekä valitaan sellainen x_0:n ympäristö W, että pätee

$$x \in W \quad \Rightarrow \quad \rho(F(x), F(x_0)) < \epsilon.$$

Kiinnitetään $n \in \mathbb{Z}_+$. Valitaan pisteen x_0 ympäristö U_n, joka leikkaa vain äärellisen monta kokoelman $\mathcal{B}_n$ joukkoa. Nyt kun käydään läpi kokoelman $\mathcal{B}_n$ joukot B, niin kaikki paitsi äärellisen moni funktioista $f_{n,B}$ saavat arvon nolla joukossa U_n. Koska funktiot $f_{n,B}$ ovat jatkuvia, niin voidaan valita sellainen pisteen x_0 ympäristö V_n, että $V_n \subseteq U_n$ ja lisäksi kaikkien ei-nollafunktioiden $f_{n,B}$ saamat arvot vaihtelevat korkeintaan $\frac{\epsilon}{2}$:n verran.

Valitaan tällainen x_0:n ympäristö V_n jokaiselle indeksille $n \in \mathbb{Z}_+$. Valitaan sitten sellainen $N \in \mathbb{Z}_+$, että $\frac{1}{N} \leq \frac{\epsilon}{2}$ ja määritellään $W = V_1 \cap \ldots \cap V_N$. On osoitettava, että W on etsitty x_0:n ympäristö. Olkoon $x \in W$. Jos $n \leq N$, niin

$$|f_{n,B}(x) - f_{n,B}(x_0)| \quad \leq \quad \frac{\epsilon}{2}$$

koska kuvaus $f_{n,B}$ kuvaa joukon X välille $[0, \frac{1}{n}]$. Näin ollen

$$\rho(F(x), F(x_0)) \quad \leq \quad \frac{\epsilon}{2} \quad < \quad \epsilon.$$

Nyt voidaan todeta, että kuvaus F on jatkuva kuvaus metriselle avaruudelle $[0,1]^J$. Tämän ja aikaisemmin todetun perusteella se on siis upotus.

Todistetaan sitten väitteen toinen suunta. Oletetaan että X on metristyvä topologinen avaruus. Lauseen 5.2.2 nojalla voidaan todeta, että X on säännöllinen. On siis osoitettava, että X:llä on kanta, joka on σ-lokaalisti äärellinen.

Valitaan metriikka d, joka indusoi avaruuden X topologian. Olkoon kaikille $m \in \mathbb{Z}_+$ $\mathcal{A}_m$ kaikkien $\frac{1}{m}$-säteisten avoimien kuulien kokoelma, joka peittää X:n. Nyt apulauseen 5.1.5 nojalla on olemassa σ-lokaalisti äärellinen kokoelma $\mathcal{B}_m$, joka peittää X:n ja on $\mathcal{A}_m$:n tihennys. Tässä jokaisen $\mathcal{B}_m$:n joukon läpimitta on korkeintaan $\frac{2}{m}$. Olkoon $\mathcal{B}$ kaikkien kokoelmien $\mathcal{B}_m$ unioni, kun $m \in \mathbb{Z}_+$. Koska jokainen kokoelma $\mathcal{B}_m$ on σ-lokaalisti äärellinen, niin samoin on $\mathcal{B}$.

Valitaan nyt mielivaltainen $x \in X$ ja osoitetaan, että jokaisella $\epsilon \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ on olemassa sellainen joukko $B \in \mathcal{B}$, että $x \in B \subseteq B(x, \epsilon)$. Valitaan ensin m siten, että $\frac{1}{m} < \frac{\epsilon}{2}$. Nyt koska $\mathcal{B}_m$ on X:n peite, niin voidaan valita joukko $B \in \mathcal{B}_m$ siten, että $x \in B$. Koska nyt joukko B sisältää pisteen x ja joukon B läpimitta on korkeintaan $\frac{2}{m} < \epsilon$, niin pätee $x \in B \subseteq B(x, \epsilon)$. Koska X oli mielivaltainen, voidaan yleistää tämä koskemaan kaikkia avaruuden X pisteitä. Niinpä $\mathcal{B}$ on kanta.

$\square$

Näin ollaan siis saatu käyttöön välttämätön ja riittävä ehto topologisen avaruuden metristyvyydelle. Tämän lauseen sovellukset topologiassa ovat merkittäviä.

Jos esimerkiksi tiedetään, että topologinen avaruus X on säännöllinen ja sillä on σ-lokaalisti äärellinen kanta, niin tiedetään myös, että sen topologian indusoi jokin metriikka d. Tällöin voidaan käyttää metriikkaa d todistamaan joitakin muita ominaisuuksia avaruudesta X, vaikka ei tiedettäisikään miten d on määritelty.

Toisaalta jos avaruus X tiedetään metristyväksi, niin tiedetään myös että se on säännöllinen ja sillä on σ-lokaalisti äärellinen kanta $\mathcal{B}$. Silloin voidaan käyttää tätä kantaa avuksi joidenkin ominaisuuksien todistamiseen, vaikka ei tiedettäisikään tarkasti mitä joukkoja kantaan kuuluu.

Kirjallisuutta

[1] Adams, C. & Franzosa, R. *Introduction to Topology: Pure and Applied* 1st ed., Pearson, 2008.

[2] Bourbaki, N. *Elements of Mathematics: General Topology, Part 1* Hermann, Paris, 1966.

[3] Bourbaki, N. *Elements of Mathematics: General Topology, Part 2* Hermann, Paris, 1966.

[4] Chatterjee, D. *Topology, General & Algebraic* New Age International (P) Ltd., New Delhi, 2007.

[5] Munkres, J. *Topology* 2nd ed., Prentice-Hall, Upper Saddle River, 2000.

[6] Patterson, E. M. *Topology* 2nd ed., Oliver and Boyd, Edinburgh, 1959.

[7] Sorgenfrey, R. H. *On the topological product of paracompact spaces* Bull. Amer. Math. Soc. **53**, s. 631–632, 1947. Saatavilla:`http://www.ams.org/journals/bull/1947-53-06/S0002-9904-1947-08858-3/S0002-9904-1947-08858-3.pdf`

[8] Väisälä, J. *Topologia I* 1. painos, Limes ry, Helsinki, 1999.

[9] Väisälä, J. *Topologia II* 1. painos, Limes ry, Helsinki, 1999.